MAT0554 - Uma Discussão da 3-esfera

Eduardo Ventilari Sodré - NUSP 11222183

3 de outubro de 2021

Há diversas definições equivalentes da 3-esfera como objeto matemático, cada uma evidenciando um aspecto geométrico ou algébrico diferente dela. A mais direta, origem de seu nome, vem de entender a 3-esfera como generalização da 1-esfera (a circunferência S^1) e a 2-esfera:

$$S^3 \coloneqq \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}.$$

Naturalmente, esta definição permite concluir que a 3-esfera é uma 3-variedade, sendo pré-imagem de valor regular pela função suave $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, de codimensão 1 em $\mathbb{R}^4$. Esta definição permite também identificar sua estrutura algébrica, introduzindo primeiro a $\mathbb{R}$-álgebra de divisão dos *quatérnios* $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{H} \coloneqq \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}\}.$$

$\mathbb{H}$ é canonicamente isomorfo a $\mathbb{R}^4$, e considerando a norma em $\mathbb{H}$ dada por

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

com $\mathbf{q} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, temos que

$$S^3 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} \mid \|\mathbf{q}\| = 1\}.$$

Como S^3 é subgrupo fechado de $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ com sua estrutura multiplicativa, verifica-se ainda mais que S^3 é um grupo de Lie. Outra visão algébrica da 3-esfera é obtida considerando primeiro a representação matricial dos quatérnios por

$$a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),$$

sendo também homomorfismo de grupos com respeito à multiplicação de matrizes.

Com ela, tem-se que

$$\begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff a^2+b^2+c^2+d^2 = 1,$$

ou seja, se e somente se $\|\mathbf{q}\| = 1$. Sabendo que o grupo especial unitário $\mathrm{SU}(2)$ é dado por $\{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = I, \det A = 1\}$, há então uma função $\varphi : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ dada por

$$\psi(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}.$$

ela é claramente injetora, e é sobrejetora pois, se

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2),$$

é porque $|x|^2+|y|^2 = |z|^2+|w|^2 = 1$, $x\overline{z}+y\overline{w} = 0$, e $xw - zy = 1$. Mas então

$$\begin{aligned} x\overline{z}w - \overline{z}zy = \overline{z} &\implies \\ -y\overline{w}w - \overline{z}zy = \overline{z} &\implies \\ -y(|w|^2+|z|^2) = \overline{z} &\implies -y = \overline{z}, \end{aligned}$$

e analogamente mostra-se que $\overline{w} = x$. Assim, a matriz terá forma

$$\begin{bmatrix} x & -\overline{z} \\ z & \overline{x} \end{bmatrix},$$

que será elemento na imagem de φ. Isto demonstra um isomorfismo entre S^3 e $\mathrm{SU}(2)$. Uma última visão algébrica da 3-esfera, equivalente em espírito às anteriores, é considerando como subconjunto de $\mathbb{C}^2$, em que

$$S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

A partir dessas definições equivalentes, é possível traçar um perfil da *fibração de Hopf* da 3-esfera. Considerando $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ e $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, tem-se a função

$$\begin{array}{rccc} \pi : & S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ & (z,w) & \longmapsto & (2z\overline{w}, |z|^2 - |w|^2). \end{array}$$

Sua imagem está realmente contida em S^2, o conjunto dos pontos $(a,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tais que $|a|^2 + h^2 = 1$, pois

$$\begin{aligned} |2z\overline{w}|^2 + (|z|^2 - |w|^2)^2 &= 4|z|^2|w|^2 + |z|^4 - 2|z|^2|w|^2 + |w|^4 \\ &= |z|^4 + 2|z|^2|w|^2 + |w|^4 = (|z|^2+|w|^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Dado $(a,h) \in S^2$, consideremos a pré-imagem $\pi^{-1}(a,h)$. Para $h = 1$, sabe-se que $a = 0$, e portanto $|z|^2 - |w|^2 = 1$ implica $|z|^2 = 1, w = 0$. Assim

$$\pi^{-1}(0,1) = \{(e^{it}, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{e^{it} \cdot (1,0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

considerando a ação de S^1 em S^3 dada por $e^{it} \cdot (z,w) = (e^{it}z, e^{it}w)$. Tal ação, vista como fluxo $\{\varphi^t\}$ em S^3 com respeito a t, é o *fluxo de Hopf*. Analogamente, tomando $h = -1$, teremos que

$$\pi^{-1}(0,-1) = \{(0, e^{it}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{e^{it} \cdot (0,1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Vendo $\pi^{-1}(0,1)$ e $\pi^{-1}(0,-1)$ em $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$, com a identificação $(a,b,c,d) \mapsto (a+bi, c+di)$, temos que tais conjuntos são da forma

$$\pi^{-1}(0,1) = \{(\cos t, \operatorname{sen} t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$\pi^{-1}(0,-1) = \{(0, 0, \cos t, \operatorname{sen} t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Note que, na visualização de $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ como a compactificação de $\mathbb{R}^3$ pela projeção estereográfica, dada por

$$(x,y,z,w) \mapsto \frac{1}{1-w}(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w}\right),$$

obtemos que $\pi^{-1}(0,1)$ é simplesmente a circunferência unitária de raio 1 centrada na origem e contida no plano xy, enquanto $\pi^{-1}(0,-1)$ é o eixo z, representando uma circunferência em S^3 com o ponto no infinito ∞.

Procuremos entender as outras pré-imagens de π; de fato, para $h \neq \pm 1$, teremos que $|a| = \sqrt{1-h^2}$, e

$$\begin{cases} |z|^2 + |w|^2 = 1 \\ |z|^2 - |w|^2 = h \end{cases} \implies \begin{cases} |z|^2 = \frac{1+h}{2} \\ |w|^2 = \frac{1-h}{2} \end{cases}.$$

Deste modo, $z = \sqrt{\frac{1+h}{2}} e^{i\alpha}$, $w = \sqrt{\frac{1-h}{2}} e^{i\beta}$. Com a condição de $2z\overline{w} = a$, ou seja, $\sqrt{1-h^2} e^{i(\alpha-\beta)} = a$, teremos que

$$\pi^{-1}(a,h) = \left\{ e^{it} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+h}{2}} \frac{a}{|a|}, \sqrt{\frac{1-h}{2}} \right) : t \in \mathbb{R} \right\},$$

novamente órbitas da ação do fluxo de Hopf dado pela ação de S^1 em S^3. Ainda mais, para $h \in (-1,1)$ fixo, considera-se a pré-imagem de $C_h = \{(a,h) \in S^2\}$, a circunferência horizontal na 2-esfera de "altura" h:

$$\pi^{-1}(C_h) = \left\{ \left(\sqrt{\frac{1+h}{2}} e^{i(t+s)}, \sqrt{\frac{1-h}{2}} e^{it} \right) \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq S^3.$$

É um toro, parametrizado pelos ângulos t e s. Isto pois corresponde aos pontos $(z, w) \in S^3$ tais que $|z|^2 = \frac{1+h}{2}$ e $|w|^2 = \frac{1-h}{2}$, ou seja, isomorfo a $S^1 \times S^1$. A título de curiosidade, tais toros, vistos em $\mathbb{R}^3$ pela projeção estereográfica, correspondem aos pontos

$$\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1-h}{2}}\operatorname{sen} t}\left(\sqrt{\frac{1+h}{2}}\cos(t+s), \sqrt{\frac{1+h}{2}}\operatorname{sen}(t+s), \sqrt{\frac{1-h}{2}}\cos t\right),$$

onde $t, s \in \mathbb{R}$, e $h \in (-1, 1)$ é fixado. Para cada s fixado, ou seja, fixado $a \in C_h$ (dado unicamente por seu argumento s), temos que a figura correspondente é de fato uma circunferência, preservada pela projeção estereográfica, e órbita do fluxo de Hopf $\mathbf{q} \mapsto e^{it} \cdot \mathbf{q}$, como já visto.

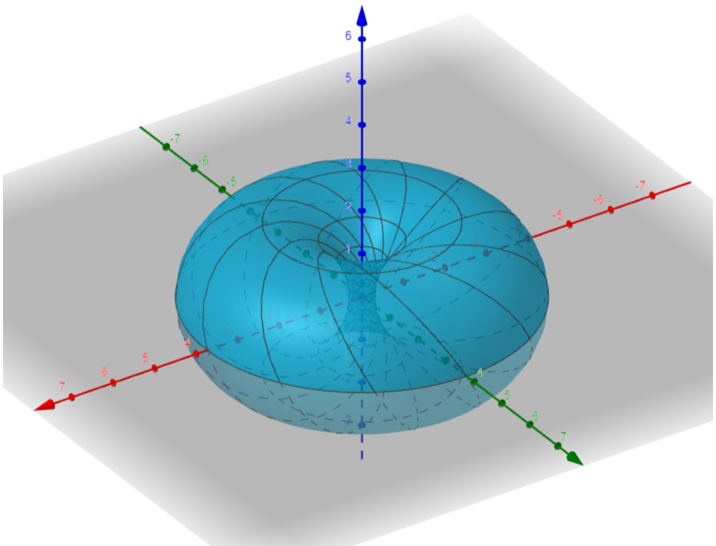

Figura 1: Exemplo de toro de Hopf para $h = -0.5$. Notam-se os círculos de Hopf dos quais o toro é composto.

Uma observação a ser feita é que, para qualquer par de circunferências distintas da fibração de Hopf, seu "linking number" é diferente de 0, ou seja, quaisquer duas circunferências são "linkadas"; Isto é visível considerando $\pi^{-1}(0, 1)$ e $\pi^{-1}(0, -1)$, e observando que o linking number (definido em termos do grau topológico de um certo mapa suave) é invariante por homotopia.

Como grupo de Lie, é possível entender a 3-esfera também por seus subgrupos e quocientes, assim como pela ação de outros grupos nela. De fato, o fluxo de Hopf nos dá uma maneira como S^1 pode agir em S^3. Como a ação

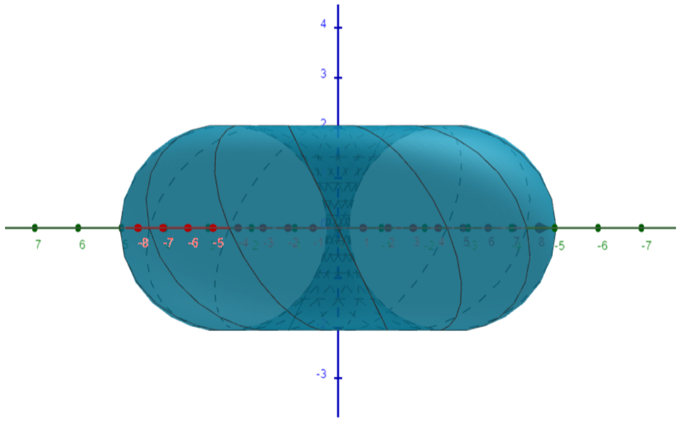

Figura 2: Visão transversal do toro: observa-se como o círculo de Hopf está contido no plano que tangenciam os círculos cuja revolução pelo eixo z gera o toro. São os *círculos de Villarceau.*

é suave, livre e própria (pois as variedades serem compactas), o teorema da variedade quociente nos dá que o espaço de órbitas é S^3/S^1 é difeomorfo à esfera S^2.

A ideia do fluxo de Hopf pode ser adaptada para encontrar outras ações de grupos finitos em S^3: considerando a ação

$$(z, w) \mapsto (e^{2\pi i/p} z, e^{2\pi i q/p} w),$$

para $p \in \mathbb{N}$ e q coprimo com p. Com esta ação do grupo discreto $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ em S^3 dada por difeomorfismos, ela é suave, própria e livre, de modo que o espaço das órbitas é variedade suave homogênea. Esta é a definição do *lens space* $L(p;q)$. Tais espaços formam uma classe importante de exemplos e contraexemplos em topologia diferencial, e podem ser construídos por meio da identificação de certos setores esféricos na bola sólida em $\mathbb{R}^3$.

Também pode-se entender a 3-esfera por meio de sua álgebra de Lie. Como

$$S^3 \cong \mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = I \text{ e } \det A = 1\},$$

calcula-se o espaço tangente na identidade ao derivar

$$(I + tX)(I + tX)^* = I, \ \det(I + tX) = 1$$

e igualar $t = 0$, obtendo que

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0 \text{ e } \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Tais matrizes serão da forma

$$\begin{bmatrix} bi & -c-di \\ c-di & -bi, \end{bmatrix},$$

ou seja, correspondendo exatamente aos quatérnios puros da forma $u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$, isomorfos naturalmente a $\mathbb{R}^3$. Pode-se então entender como o grupo S^3 age em $\mathbb{R}^3$ por meio da representação adjunta $S^3 \cong \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2))$:

$$\mathrm{Ad}(\mathbf{q})(\mathbf{x}) = \mathbf{q}\mathbf{x}\mathbf{q}^{-1},\ \mathbf{q} \in S^3,\ \mathbf{x} \in \mathfrak{su}(2).$$

É possível demonstrar que, na identificação de $\mathfrak{su}(2)$ com $\mathbb{R}^3$, a imagem da representação adjunta é exatamente o grupo de Lie SO(3), e o núcleo da representação adjunta $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ é $\{\pm\mathbf{1}\}$. Isto demonstra um fato adicional sobre a 3-esfera; como ela é conexa e simplesmente conexa (calculando a homologia das esferas), e o mapa da representação adjunta é homomorfismo sobrejetor de grupos de Lie, ele será um recobrimento de grau 2. Assim, S^3 é o recobrimento universal de SO(3), e também recobrimento duplo.

Podemos ver como, por meio da 3-esfera, encontra-se a identificação entre SO(3) e $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, o espaço projetivo 3-dimensional. Isto pois tais espaços fazem as mesmas identificações como quocientes de S^3; o primeiro já foi visto, considerando as coclasses formadas por $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$ no núcleo da representação adjunta; e a segunda é obtida ao ver que cada par de vetores antipodais na 3-esfera dá origem ao mesmo subespaço de dimensão 1 em $\mathbb{R}^4$.

Retoma-se a análise de subgrupos finitos da 3-esfera, pelos quais pode-se tomar o quociente e resultar em uma variedade homogênea. A representação adjunta $S^3 \mapsto \mathrm{SO}(3)$ nos indica que conhecer os subgrupos finitos de SO(3) nos permite deduzir quais são os de S^3; e há de fato uma descrição completa dos subgrupos finitos de SO(3), sendo eles:

- Os cíclicos, isomorfos a C_n;
- Os diedrais, isomorfos a D_{2n};
- O grupo de simetrias do tetraedro, isomorfo a A_4;
- O grupo de simetrias do cubo/octaedro, isomorfo a S_4;
- O grupo de simetrias do dodecaedro/icosaedro, isomorfo a A_5.

Com isso, pode-se considerar a versão "binária" destes grupos, tomadas suas pré-imagens pela representação adjunta. Isto por exemplo nos dá

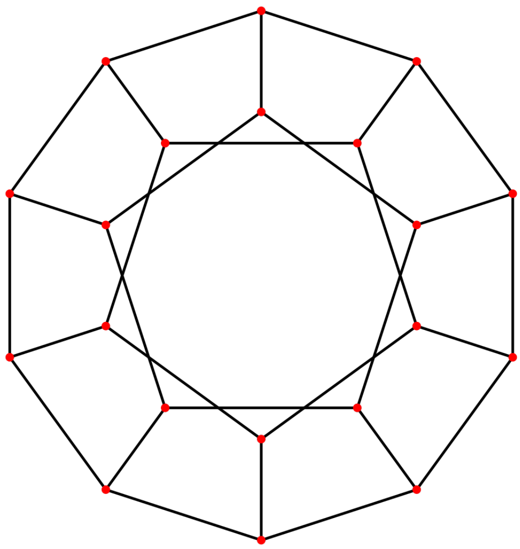

Figura 3: Dodecaedro regular projetado em uma de suas faces. Note que para identificar faces opostas é necessária uma rotação de 1/10, 3/10 ou 5/10 de volta, no sentido horário ou anti-horário. Colagens em ângulos distintos geram espaços geometricamente distintos.

o *espaço dodecaédrico de Poincaré* como o quociente de SO(3) pelo grupo icosaédrico, isomorfo também ao quociente $S^3/\tilde{I}$, considerando $\tilde{I}$ o grupo icosaédrico binário em S^3. Tal espaço é comumente construído pela identificação de faces opostas num dodecaedro regular, rotacionando elas em ângulo de $36° = \frac{2\pi}{10}$, e uma das propriedades interessantes deste espaço é que ele possui homologia igual à da 3-esfera, mesmo não sendo homeomorfo a ela. Outra construção interessante similar é feita ao colar as faces opostas do dodecaedro com uma rotação de $\frac{6\pi}{10}$, resultando no *espaço dodecaédrico de Seifert-Weber*. Ele é munido de uma geometria distinta da esférica (que o espaço dodecaédrico de Poincaré herda de S^3), a geometria hiperbólica.

Outro caso interessante, o de quocientes de S^3 por subgrupos cíclicos, já nos foi proposto: é o caso dos espaços lenticulares $L(p;q)$. Eles podem ser realizados por identificações feitas na bola fechada unitária $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^3$, onde selecionamos p pontos equidistantes no equador, $\{a_0, \ldots, a_{p-1}\}$, traçam-se os meridianos passando por eles, e identificam-se triângulos esféricos ao identificar o polo norte com o polo sul, e os pontos a_i com a_{i+q} e a_{i+1} com a_{i+q+1}. Note que $L(2;1)$ é exatamente o espaço projetivo real de dimensão 3, $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$; Ele realiza as identificações

$$(z, w) \mapsto (e^{2\pi i/2}z, e^{2\pi i/2}w) = (-z, -w) = -(z, w),$$

ou seja, os pontos antipodais da 3-esfera.

Os espaços lenticulares $L(p;q)$ associados a um mesmo p têm a propriedade de possuírem grupos fundamentais isomorfos a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, mas isto não os descreve unicamente, pois eles podem ser não homeomorfos entre si. Eles formam exemplos de espaços que não são descritos completamente apenas por sua homologia e grupo fundamental, tendo caráter teórico importante no desenvolvimento da teoria geométrica destes espaços. Em particular vale:

Teorema. *$L(p;q)$ é difeomorfo a $L(p;q')$ se e somente se $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \mod p$.*

Uma outra maneira de visualizar tais espaços lenticulares está em vê-los como uma colagem de dois toros sólidos $S^1 \times D^2$ ao longo de seus bordos $S^1 \times \partial D^2$, mapeando meridianos $\{x\} \times \partial D^2$ em círculos de "inclinação" q/p. Isto também está intimamente ligado à decomposição da 3-esfera como união de dois toros sólidos de acordo com a fibração de Hopf, de modo que $L(0;1) \cong S^3$ naturalmente. Os espaços lenticulares pertencem a uma classe mais geral de 3-variedades, as *variedades de Seifert*.

Referências

[CS21] André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski. *Topologia e geometria de 3-variedades - Uma agradável introdução.* 33º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2021.

[Gor20] Claudio Gorodski. *Smooth Manifolds.* 1ª ed. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-49775-0.

[Hat07] Allen Hatcher. "Notes on Basic 3-Manifold Topology". 2007. URL: https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf.

[Lee12] John Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5.