A Distância C^r em Compactos da Reta

Eduardo Sodré

15 de Setembro de 2019

1 Introdução

Dado um sistema dinâmico discreto na reta, uma das perguntas mais naturais a ser feita sobre ele é a respeito de sua estabilidade estrutural, ou seja, o quão estável é a dinâmica induzida pela iteração da função, sujeita a pequenas variações do próprio sistema. Informalmente, pergunta-se as condições em que pode-se garantir que funções "próximas" correspondem a dinâmicas "parecidas" ou equivalentes (com mais rigor, topologicamente conjugadas).

A referência [1] contém a abordagem introdutória deste tópico no contexto inicial de funções definidas em intervalos da reta. O autor formaliza a noção de proximidade de dinâmicas por meio da proximidade de funções, induzida pela distância C^r como definida abaixo. O texto presente procura realizar explorações adicionais acerca da pseudo-métrica induzida por esta distância, evidenciando resultados prontamente aplicáveis à teoria introdutória da estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos.

2 Definições e Teoremas

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio aberto da reta, e $K \subset A$ um subconjunto não-vazio compacto de $\mathbb{R}$. Relembra-se que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^r, com $r \in \mathbb{N}$, se f é r vezes derivável e $f^{(r)}$ é contínua, com $f^{(i)} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, ..., r$.

Seja então $\mathcal{C}^r(A, \mathbb{R})$ o conjunto das funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r. A **distância C^r em K** entre duas funções $f, g \in \mathcal{C}^r(A, \mathbb{R})$ é dada por

$$d_K^r(f, g) = \sup_{x \in K} \{ \ |f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, ..., |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)| \ \},$$

onde as derivadas nos pontos são com respeito ao conjunto A, mas o supremo é tomado nos pontos do compacto K.

Para $\epsilon > 0$ e $K \subset A$ compacto não-vazio, diremos que $f, g \in \mathcal{C}^r(A, \mathbb{R})$ serão **C^r-ϵ próximas em K** se $d_K^r(f, g) < \epsilon$. Quando K é evidente do contexto, pode-se denotar $d_K^r(f, g)$ por $d^r(f, g)$, ou $d_r(f, g)$. Diz-se que duas funções são **C^r-ϵ próximas** quando são próximas em todo o domínio comum entre elas (nesse caso, A).

A rigor, tal definição falha em ser uma métrica apenas na consideração de quando $d^r_K(f,g) = 0$; nesse caso, não teremos que $f = g$, mas sim que $f|_K = g|_K$. Assim, seria determinada uma pseudo-métrica, satisfazendo ainda ser positivo-definida e a desigualdade triangular, com $d(f,f) = 0$. Ainda mais, pode-se considerar como sendo uma pseudo-métrica induzida pela seminorma em $\mathcal{C}^r(A,\mathbb{R})$ dada por $\rho(f) = \sup_{x\in K}\{\ |f(x)|, |f'(x)|, ..., |f^{(r)}(x)|\ \}$.

Ela oferece uma possível interpretação do que significaria duas funções estarem próximas, também especificando até que classe de diferenciabilidade, ou em que restrição de seus domínios. Tal interpretação é prontamente aplicável à descrição do que seria a estabilidade estrutural de um sistema dinâmico discreto, como é feito em [1].

O fato de a restrição ser tomada em K compacto é de importância para alguns resultados que seguirão, podendo assumir então que, com $f \in \mathcal{C}^r(A,\mathbb{R})$, cada uma das funções $f^{(i)}|_K$, para $i = 0, 1, ..., r$, é uniformemente contínua, interagindo bem com convergência uniforme de funções e a pseudo-métrica dada. De qualquer jeito, há possibilidade de generalização em assumir $X \subset A$ não compacto, mas sendo necessárias hipóteses adicionais sobre as funções tratadas e X para obter os mesmos resultados.

Em contrapartida, é possível tornar mais específica e simples a análise feita ao considerar apenas intervalos compactos da reta, e não compactos gerais. Dessa maneira, não haveria total necessidade em se tomar f num aberto maior para discutir critérios de diferenciabilidade, bastando considerar limites laterais nas extremidades do intervalo, e nesse intervalo todos os pontos seriam ponto de acumulação à esquerda e à direita, exceto nas extremidades. No entanto, tal análise possivelmente excluiría casos de compactos como o conjunto de Cantor invariante na aplicação logística F_μ com $\mu > 4$, e o trabalho a mais feito em se definir o aberto onde o compacto está contido é totalmente compatível com os casos de intervalos compactos, mesmo que mais detalhista.

Enunciam-se agora diversas proposições importantes para entender a topologia de $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$ induzida pela distância C^r baseada em K, e como ela interage com adição, multiplicação e composição de funções. Em certo sentido, pode-se pensar em quais operadores serão contínuos nesse espaço pseudo-métrico.

Teorema 2.1 (Soma por uma função). *Sejam $f,g,h \in \mathcal{C}^r(A,\mathbb{R})$. Então, para todo $\epsilon > 0$ real, f e g são C^r-ϵ próximas se e somente se $f+h$ e $g+h$ são C^r-ϵ próximas.*

Demonstração. A demonstração segue facilmente ao observar que $d^r_K(f+h, g+h) = d^r_K(f,g)$, e vendo que deve valer para todo o domínio também. $\square$

Teorema 2.2 (Multiplicação por uma função). *Sejam $f,g,h \in \mathcal{C}^r(A,\mathbb{R})$, e $K \subset A$ compacto não-vazio. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se f e g são C^r-δ próximas em K, então $h \cdot f$ e $h \cdot g$ são C^r-ϵ próximas em K.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ fixo. Observe que, para $x \in K$ e $0 \leq n \leq r$,

$$\begin{aligned} |(h \cdot f)^{(n)}(x) - (h \cdot g)^{(n)}(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x)(f^{(n-k)}(x) - g^{(n-k)}(x)) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |h^{(k)}(x)| \cdot |f^{(n-k)}(x) - g^{(n-k)}(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k |f^{(n-k)}(x) - g^{(n-k)}(x)| \end{aligned}$$

com $M_k = \max_{x \in K}\{|h^{(k)}(x)|\}$, para $k = 0, 1, ..., n$, já que K é compacto, de modo que o máximo existe.

Assim, basta tomar $0 < \delta_n \leq \min\{\epsilon/((n+1)\binom{n}{k} M_k)\}$ com $k = 0, 1, ..., n$, e então tomar $0 < \delta < \min \delta_n$, com $n = 0, 1, ..., r$, de modo que a implicação do teorema é válida. □

Lema 2.3. *Sejam $f, g \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$, e $K \subset A$ compacto não-vazio. Seja também h uma função contínua definida na imagem de K por f e por g. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se f e g são funções C^0-δ próximas em K, então $h \circ f$ e $h \circ g$ são C^0-ϵ próximas em K.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ fixo. Veja que, para h definida na imagem de K por f e g (união de dois compactos sendo compacta), h é uniformemente contínua, de modo que existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \epsilon$. Basta então tomar $\delta = \delta_1$ e verificar a condição. □

Teorema 2.4 (Composição à esquerda por uma função). *Sejam $f, g \in \mathcal{C}^r(A, \mathbb{R})$, e $K \subset A$ compacto não-vazio. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um aberto contendo $f(K) \cup g(K)$ e $h \in C^r(B, \mathbb{R})$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se f e g são C^r-δ próximas em K, então $h \circ f$ e $h \circ g$ são C^r-ϵ próximas em K.*

Demonstração. Usa-se a seguinte fórmula para a n-ésima derivada em um ponto da composição de duas funções:

$$(h \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}(f(x)) \cdot B_{n,k}(f'(x), ..., f^{(n-k+1)}(x))$$

onde $B_{n,k}$ são os Polinômios de Bell. Por simplicidade, denote

$$B_{n,k}(f'(x), ..., f^{(n-k+1)}(x)) = B_{n,k,f}(x).$$

Fixado $n \in \{1, 2, ..., r\}$ e considerando $x \in K$, tem-se

$$\begin{aligned} |(h \circ f)^{(n)}(x) - (h \circ g)^{(n)}(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}(f(x)) B_{n,k,f}(x) - \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}(g(x)) B_{n,k,g}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |h^{(k)}(f(x)) B_{n,k,f}(x) - h^{(k)}(g(x)) B_{n,k,g}(x)|, \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
&|h^{(k)}(f(x))B_{n,k,f}(x) - h^{(k)}(g(x))B_{n,k,g}(x)| \\
\leq\ & |h^{(k)}(f(x))B_{n,k,f}(x) - h^{(k)}(f(x))B_{n,k,g}(x)| + |h^{(k)}(f(x))B_{n,k,g}(x) - h^{(k)}(g(x))B_{n,k,g}(x)| \\
=\ & |h^{(k)}(f(x))| \cdot |B_{n,k,f}(x) - B_{n,k,g}(x)| + |B_{n,k,g}(x)| \cdot |h^{(k)}(f(x)) - h^{(k)}(g(x))|.
\end{aligned}$$

Como $(h^{(k)} \circ f)$ e $B_{n,k,g}$ são funções contínuas em domínio compacto K, considerando $x \in K$, existem $H_k = \max_{x\in K}\{|(h^{(k)} \circ f)(x)|\}$ e $B_k = \max_{x\in K}\{|B_{n,k,g}(x)|\}$. Portanto

$$\begin{aligned}
&|h^{(k)}(f(x))B_{n,k,f}(x) - h^{(k)}(g(x))B_{n,k,g}(x)| \\
\leq\ & H_k \cdot |B_{n,k,f}(x) - B_{n,k,g}(x)| + B_k \cdot |h^{(k)}(f(x)) - h^{(k)}(g(x))|.
\end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ fixo. Queremos achar $\delta_n > 0$ tal que se f, g são C^r-δ_n próximas em K (e portanto C^n-δ_n próximas em K), então $|(h \circ f)^{(n)}(x) - (h \circ g)^{(n)}(x)| < \epsilon$. Tomaria-se então $0 < \delta < \min\{\delta_n\}$ para $n \in \{1, 2, ..., r\}$, achando $\delta > 0$ tal que se f, g forem C^r-δ próximas em K, $h \circ f, h \circ g$ serão C^r-ϵ próximas em K.

Considerando $B = \max\{B_k\}$ e $H = \max\{H_k\}$ para $k = 1, ..., n$, basta achar $\delta_n > 0$ tal que se f, g são C^r-δ próximas em K, então $|B_{n,k,f}(x) - B_{n,k,g}(x)| < \epsilon/2Hn$ e $|h^{(k)}(f(x)) - h^{(k)}(g(x))| < \epsilon/2Bn$, para todo $k = 1, 2, ..., n$. Isto pois teria-se que

$$\begin{aligned}
|(h \circ f)^{(n)}(x) - (h \circ g)^{(n)}(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} h^{(k)}(f(x))B_{n,k,f}(x) - \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}(g(x))B_{n,k,g}(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |h^{(k)}(f(x))B_{n,k,f}(x) - h^{(k)}(g(x))B_{n,k,g}(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} H_k|B_{n,k,f}(x) - B_{n,k,g}(x)| + B_k|h^{(k)}(f(x)) - h^{(k)}(g(x))| \\
&< \sum_{k=1}^{n} H_k \cdot (\epsilon/2Hn) + B_k \cdot (\epsilon/2Bn) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}(\epsilon/2n + \epsilon/2n) \leq \sum_{k=1}^{n} \epsilon/n = \epsilon.
\end{aligned}$$

Para $|B_{n,k,f}(x) - B_{n,k,g}(x)| < \epsilon/2Hn$, veja inicialmente que $B_{n,k} : K^{n-k+1} \subset \mathbb{R}^{n-k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial, portanto uniformemente contínua em domínio compacto. Assim, para $\epsilon/2Hn > 0$, existe $\delta_{1,k,n}$ tal que se $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| < \delta_{1,k,n}$, então $|B_{n,k}(\mathbf{x}) - B_{n,k}(\mathbf{y})| < \epsilon/2Hn$. Tome $0 < \delta_{1,n} < \min\{\delta_{1,k,n}\}$ para $k \in \{1, ..., n\}$.

Isto pois agora, se $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| < \delta_{1,n}$, então $|B_{n,k}(\mathbf{x}) - B_{n,k}(\mathbf{y})|| < \epsilon/2Hn$ para todo $k = 1, 2, ..., n$.

Considere $\mathbf{x}_f = (f'(x), ..., f^{(n-k+1)}(x))$ e $\mathbf{x}_g = (g'(x), ..., g^{(n-k+1)}(x))$. Seja então $\delta_{2,n} > 0$ tal que, se f, g são C^r-$\delta_{2,n}$ próximas em K, então $||\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g|| < \delta_{1,n}$. Explicitamente, pode-se tomar $\delta_{2,n} = \delta_{1,n}/\sqrt{n}$, satisfazendo a propriedade para todo $k = 1, 2, ..., n$:

$$||\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g||^2 = \sum_{j=1}^{n-k+1} (f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x))^2 < \sum_{j=1}^{n-k+1} (\delta_{1,n}/\sqrt{n})^2 \leq \delta_{1,n}^2$$

Deste modo, acha-se que se f, g são funções $C^r - \delta_{2,n}$ próximas em K, então $|B_{n,k,f}(x) - B_{n,k,g}(x)| < \epsilon/2Hn$.

Para o caso de $|h^{(k)}(f(x)) - h^{(k)}(g(x))| < \epsilon/2Bn$, usa-se o lema anterior de composição de funções no caso C^0, achando $\delta_{3,k,n}$ tal que se f, g forem C^0-$(\delta_{3,k,n})$ próximas, então $h^{(k)} \circ f$ e $h^{(k)} \circ g$ são C^0-$(\epsilon/2Bn)$ próximas, ou seja, $|h^{(k)}(f(x)) - h^{(k)}(g(x))| < \epsilon/2Bn$. Considera-se então $\delta_{3,n} = \min\{\delta_{3,k,n}\}$ para $k = 1, ..., n$. Finalmente, toma-se $\delta_n = \min\{\delta_{2,n}, \delta_{3,n}\}$, completando a demonstração. □

Teorema 2.5 (Iteração). *Sejam $f, g \in \mathcal{C}^r(A, \mathbb{R})$ tais que A é invariante por f e g, $K \subset A$ é compacto não-vazio, e $n \in \mathbb{N}$ um número natural fixo. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se f, g são C^r-δ próximas em K, então f^k e g^k são C^r-ϵ próximas em K, para todo $k = 0, 1, ..., n$.*

Demonstração. A demonstração é feita sob indução em $n \in \mathbb{N}$, fixado $\epsilon > 0$. Claramente vale para $n = 1$; Suponha que para $m \in \mathbb{N}$, exista tal δ_m. Quer-se mostrar que para $m + 1$, existe δ_{m+1} satisfazendo a condição. Veja que, para $x \in K$,

$$d_K^r(f^{m+1}, g^{m+1}) \leq d_K^r(f \circ f^m, f \circ g^m) + d_K^r(f \circ g^m, g \circ g^m).$$

Pela hipótese de indução, existe $\delta_m > 0$ tal que se $d_K^r(f, g) < \delta_m$, então $d_K^r(f^k, g^k) < \epsilon$, para todo $k = 0, 1, ..., m$. Pelo teorema anterior tratando de composição de funções, existe também $\delta > 0$ tal que se $d_K^r(f^m, g^m) < \delta$, então $d_K^r(f \circ f^m, f \circ g^m) < \epsilon/2$.

Reaplicando a hipótese de indução, existe $\delta'_m > 0$ tal que se $d_K^r(f, g) < \delta'_m$, então $d_K^r(f^k, g^k) < \delta$ para $k = 0, 1, ..., m$, em particular para $k = m$. Daí, tomando $\delta_{m+1} = \min\{\delta'_m, \delta_m, \epsilon/2\}$, verá-se que se $d_K^r(f, g) < \delta_{m+1}$, então $d_K^r(f^k, g^k) < \epsilon$ para $k = 0, 1, ..., m$, e também que $d_k^r(f^{m+1}, g^{m+1})$, concluindo o passo indutivo. □

Um resultado a ser observado, mas simples demais para ser enunciado como teorema próprio, é que $d_K^r(f \circ h, g \circ h) = d_K^r(f, g)$. Veja também que as condições de A ser invariante por f e g foram tomadas apenas para que a composição por h e as suas iterações estejam definidas. Se tomarmos as funções de classe C^r em todo o $\mathbb{R}$, com $A = \mathbb{R}$, tal não seria um problema.

3 Resultados e Aplicações na Estabilidade Estrutural

Os teoremas enunciados na seção anterior indicam critérios análogos a continuidade no espaço $\mathcal{C}^r(A, \mathbb{R})$ sob a pseudo-métrica dada por d_K^r. A partir deles, pode-se tratar mais propriamente da proximidade de duas funções $f, g \in \mathcal{C}^r(A, \mathbb{R})$, implicando consequentemente na proximidade de f^n e g^n, fixado n previamente. Com tal ferramentário, pode-se enunciar conclusões mais fortes sobre em que critérios dinâmicas próximas serão também parecidas, compartilhando pontos fixos próximos, raízes próximas, entre outros. Claramente, há implicação direta na estabilidade estrutural das funções tratadas.

Lema 3.1. *Seja $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ e $p \in A$ tais que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $g \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ é uma função C^1-δ próxima de f, então existe um único $p' \in A$ tal que $|p - p'| < \epsilon$ e $g(p') = 0$, e $g'(p') \neq 0$.*

Demonstração. Pode-se tomar um compacto $K \subset A$ tal que $p \in \operatorname{int} K$, mais explicitamente um intervalo fechado em A contendo p não como extremidade, de modo que valham os teoremas anteriores para K-proximidade.

Como $f'(p) \neq 0$, então para toda vizinhança U de p (como $p \in \operatorname{int} K$, pode-se escolher U de modo que $U \subset K$), existem $u, v \in U$ tais que $f(u) < f(p) = 0 < f(v)$, com $u < p < v$ ou $v < p < u$. Isto pode ser visto explicitamente analisando o limite à direita e à esquerda de $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ com x tendendo a p, e o limite diferente de 0.

Considere $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ tal que $(p - \epsilon', p + \epsilon') \subset K$, sem perda de generalidade assumindo $u < p < v$ (o outro caso é análogo). Assim, existem $u, v \in (p - \epsilon', p + \epsilon')$ tais que $f(u) < 0 < f(v)$. Seja então $0 < \delta < \min\{|f(u)|, |f(v)|\}$. Com tal δ, se assumirmos f, g C^1-δ próximas em K, tem-se que $|g(u) - f(u)| < \delta$, portanto $g(u) < 0$, e analogamente $g(v) > 0$. Assim, pelo teorema do valor intermediário em g contínua, existe $p' \in (u, v)$ tal que $g(p') = 0$, e claramente $|p - p'| < \epsilon$.

Para a unicidade de p' numa vizinhança, lembre que f' é contínua. Assim, pelo teorema da conservação do sinal, existe $\gamma > 0$ tal que para todo $x \in [p - \gamma, p + \gamma]$ tem-se que $(f^n)'(x) \neq 0$. Seja $m = \min\{|f'(x)|\}$ para x nesse intervalo, com $m > 0$. Pode-se escolher δ de maneira que $p' \in [p - \gamma, p + \gamma]$, bastando tomar $0 < \epsilon'' < \min\{\epsilon', \gamma\}$ e realizar a construção para ϵ'', de modo que $|p - p'| < \epsilon'' < \gamma$.

Considere então $\delta > 0$ tal que, além de satisfazer as condições anteriores, satisfaz $d_K^1(f, g) < m$, tomando $\delta < m$. Assim, em $[p - \gamma, p + \gamma]$, também para todo x no intervalo vale $(g^n)'(x) \neq 0$. Suponha agora que p' não fosse único em $[p - \gamma, p + \gamma]$. Existiria então um segundo ponto $p'' \in [p - \gamma, p + \gamma]$ tal que $g^n(p'') = 0$. Mas pelo teorema de Rolle, existiria $q \in (p', p'')$ tal que $(g^n)'(q) = 0$, uma contradição. $\square$

Teorema 3.2. *Sejam $f, h \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ (com A invariante por f caso $n > 1$) e $p \in \operatorname{int} K$ tais que $f^n(p) = h(p)$ e $(f^n)'(p) \neq h'(p)$.*

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $g \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ é uma função C^1-δ próxima de f, então existe $p' \in K$ tal que $|p - p'| < \epsilon$ e $g^n(p') = h(p')$. Ainda mais, p' é único com essas propriedades numa vizinhança de p, e $(g^n)'(p') \neq h'(p')$.

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior considerando as funções $f^n - h$ e $g^n - h$, lembrando que $d^r_K(f^n - h, g^n - h) = d^r_K(f^n, g^n)$, e que pelo teorema da iteração de funções, podemos traduzir restrições para $d^r_K(f^n, g^n)$ em restrições para $d^r_K(f, g)$. $\square$

Corolário 3.3. *Sejam $f, g \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$. Suponha que f tenha uma quantidade finita não nula de raízes $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$ em um conjunto $K \subset A$ compacto, com cada $r_i \in \operatorname{int} K$ e elas satisfazendo $r_1 < r_2 < ... < r_k$ e $f'(r_i) \neq 0$ para todo $i = 1, ..., k$.*

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se g é C^1-δ próxima a f, então g tem exatamente k raízes em K, $\{r'_1, r'_2, ..., r'_k\}$, satisfazendo $r'_1 < r'_2 < ... < r'_k$ e $|r_i - r'_i| < \epsilon$, para todo $i = 1, 2, ..., k$.

Demonstração. Considere o compacto contendo cada uma das raízes r_i, de modo que valham os teoremas anteriores. Cada raiz determinará r'_i raiz de g tal que $|r_i - r'_i| < \epsilon$ a partir de um certo $\delta_i > 0$, assim basta tomar $\delta = \min\{\delta_i\}$.

Para mostrar que essas serão as únicas raizes de g em K, Veja que cada r'_i será único numa vizinhança aberta U_i de r_i. Tomando então $S = K \setminus \bigcup_{i=0}^{k} U_i$, um conjunto compacto, existe $\min_{x \in S}\{|f(x)|\} = m$. Escolhendo outra restrição para δ, pode-se assumir que para $x \in S$, $|g(x)| > m' > 0$, de modo que g não possui outras raízes em K alem dos r'_i. $\square$

Perceba que tal corolário é facilmente generalizável para as raízes de f^n num compacto, dadas as iteradas bem definidas, ou mesmo para as raízes de $f^n - h$ num compacto, h uma outra função de $\mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ e dadas as condições de não-degenerabilidade. Um exemplo claro são os pontos fixos ou periódicos hiperbólicos de um período n, considerando h a identidade.

Essencialmente, dada $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$, demonstra-se que para cada ponto fixo ou raiz de f satisfazendo condições de não-degenerabilidade, uma função $g \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ suficientemente próxima C^1 de f em K deve possuir raiz ou ponto fixo próximo deste de f, com esse grau de proximidade podendo ser tomado arbitrariamente.

Muitas vezes, quer-se g tal que ela seja C^r próxima a f em todo o $\mathbb{R}$, e não apenas num compacto. No entanto, as aplicações pontuais dos teoremas enunciados, como a proximidade de pontos fixos, podem ser feitas localmente ao escolher um compacto apropriado. Se temos uma função $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$, com $p \in A$, para tomar um compacto K em que $p \in \operatorname{int} K$ em que se possa aplicar os teoremas enunciados, basta tomar um compacto qualquer satisfazendo $p \in \operatorname{int} K$ e $K \subset A$, que sempre existirá em $\mathbb{R}$.

Ilustrando tal situação, considera-se a aplicação logística $F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, com $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Pode-se tomar uma $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suficientemente próxima de F_μ tal que g tem ponto fixo arbitrariamente próximo de 0, sendo único numa vizinhança, ponto fixo arbitrariamente próximo de $p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$, também único numa vizinhança, entre outras informações. Note que o ponto fixo de g próximo de 0 em geral será distinto da raiz de g próxima de 0.

Estendendo a aplicação do teorema, pode-se pensar na proximidade C^2 de F_μ e g, equivalente a proximidade C^0 de F_μ, g com a proximidade C^1 de F'_μ, g', para ver que g terá ponto crítico arbitrariamente próximo de $1/2$, único numa vizinhança.

Várias outras restrições podem ser tomadas para g ser parecida com F_μ, contanto que trabalhando com número finito de pontos que deseja-se fazer próximos. Além dessas restrições locais, pode-se analisar aspectos particulares de funções como F_μ para criar outras restrições globais. Como exemplo, por $F_\mu^{(2)}(x) < \epsilon < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pode-se fazer g suficientemente próxima também para que $g'' < 0$, possuindo então um único ponto de máximo, este localizado próximo de $1/2$, como visto.

Na possibilidade de impor em g todas essas características não só de proximidade com uma dada f, mas também de similaridade e mesmo aparência, pode-se chegar a um estado em que o comportamento e a dinâmica de g esteja praticamente todo determinado, faltando apenas exibir explicitamente uma conjugação topológica entre f e g, que requer mais detalhes. No entanto, prevê-se muito bem a estabilidade estrutural de f nessas imposições a g, quando possíveis.

Um outro exemplo de aplicação à análise de alguns sistemas dinâmicos é o seguinte caso: suponha $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, A invariante por f, e $p \in A$ com n-ésima pré-imagem finita $f^{-n}(\{p\}) = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$, e $(f^n)'(q_i) \neq 0$ para $i = 1, ..., k$. Quer-se saber se ou quando pontos próximo de p tem n-ésima pré-imagem semelhante, mas não pré-imagem só por f, mas por uma $g \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ função C^1 próxima de f, com A invariante por g.

Suponha p um ponto fixo de f com $f'(p) \neq 1$, por exemplo. Restringindo a distância entre f e g, é possível garantir a existência de um ponto fixo p' de g próximo de p. Veja também que $f^{-n}(\{p\})$ corresponde diretamente às raizes de $F \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ dada por $F(x) = f^n(x) - p$ num compacto $K \subset A$ apropriado. Desse modo, pode-se restringir a distância de F com outra $G \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ para que elas tenham raizes de forma similar, nas formas especificadas antes. Por fim, se quisermos uma G da forma $g^n(x) - p'$, pode-se restringir a distância entre f e g para controlar a distância de F e G, contanto que a distância de p e p' é também controlada.

Sintetizando todas as informações, considere um $\epsilon > 0$ fixo. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que $d^1_K(F, G) < \delta_1 \Rightarrow$ as raízes de F e G são próximas em ϵ num compacto K da forma especificada. Tome $F(x) = f^n(x) - p$, e note que G é uma função inespecífica ainda.

Existe também $\delta_2 > 0$ tal que se $d^1(f, g) < \delta_2$, então p' como descrito anteriormente existe com $|p - p'| < \delta_1/2$. Por fim, existe $\delta_3 > 0$ tal que $d^1_K(f, g) < \delta_3 \Rightarrow d^1_K(f^n, g^n) < \delta_1/2$. Considere agora G_1 especificada por $G_1(x) = g^n(x) - p'$, e tome $0 < \delta < \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Se $d^1(f, g) < \delta$, tem-se por consequência que

$$d^1_K(F, G_1) \leq d^1_K(f^n, g^n) + |p - p'| < \delta_1$$

de modo que F e G_1 terão conjunto de raizes em K próximas em ϵ.

Assim, finalmente, determinou-se que a pré-imagem $g^{-n}(\{p'\})$ num compacto dado será contigenciada pela distância C^1 entre f e g para ser similar à pré-imagem $f^{-n}(\{p\})$ (supondo-a finita em primeiro lugar), outra ferramenta possivelmente útil no estudo de estabilidade estrutural.

Referências

[1] Devaney, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1986. Reprinted by Westview Press, 2003.