Órbitas como uma Abordagem à Indução Matemática

Eduardo Ventilari Sodré

21 de Junho de 2019

Sumário

1 Introdução

Dado um conjunto S e uma função $s : S \longrightarrow S$ arbitrária, quer-se estudar as estruturas que a função s induz em S, com destaque às órbitas de elementos, e as relações entre os elementos de S por meio dessa função. Tal análise permite arquitetar uma teoria compreensiva de processos indutivos (ou mesmo dinâmicos) em maior abstração. A notação é sugestiva já da definição histórica da operação sucessão nos axiomas de Peano.

Tal apresentação, por sua ausência de grandes premissas acerca dos objetos trabalhados, dispensa em grande ou total parte de menção a quantidades numéricas ou cardinalidades, assim como do conjunto dos números naturais como construído pelo Axioma do Infinito. Essa característica da teoria mostra sua independência em larga parte de tais conceitos, ou possivelmente até oferecendo uma nova abordagem ao tratamento deles.

Percebe-se o potencial de aplicações possíveis da teoria descrita ao compreendê-la como síntese das ideias fundamentais de sistemas dinâmicos ao abstrair completamente o espaço sobre o qual se está trabalhando, no contexto geral da teoria de conjuntos e considerações pré-aritméticas.

Assumem-se os axiomas usuais de ZFC para a teoria que segue, e usa-se a conveção de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Inspirações para a presente exposição foram comentários oportunos do professor Odilon Luciano, esse mencionando artigos como *On Mathematical Induction*, de Leon Henkin [1], e também as ideias relevantes ao estudo de sistemas dinâmicos feito sob a orientação da professora Sônia Garcia. Ambos são, no momento de escrita, professores do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Além de ter seus comentários como inspiração inicial, o professor Luciano Odilon ofereceu também um vislumbre histórico da empreitada matemática de formalizar a aritmética em contextos axiomáticos. A progressão das ideias de Dedekind até a abordagem dos axiomas de Peano, como costumamente referidos, trouxe novas intuições acerca da presente abordagem. Uma ideia fundamental tida por ele a respeito da teoria construída está centrada na definição do conjunto das iteradas, possibilitando análises mais refinadas e completas das estruturas expostas.

Na primeira seção, apresentam-se as definições e relações iniciais acerca de conjuntos invariantes, órbitas e as estruturas induzidas por elas, configurando um arcabouço relativamente elementar comparado às outras seções, formulado para guiá-las.

A construção do conjunto das iteradas de $s : S \longrightarrow S$ é feita na segunda seção, vendo como essas novas funções interagem com as estruturas já descritas, e que novas informações elas podem trazer. Isso culmina com o teorema fundamental da identificação de uma órbita com o conjunto das iteradas sobre ela, e afirmações mais fortes os tipos específicos de órbitas vistos.

Quanto à terceira seção, tem-se a análise de como a teoria exposta compara com a abordagem de Peano e de Henkin, fornecendo uma descrição completa das órbitas num conjunto e uma nova demonstração do teorema de isomorfismo de modelos de Peano. Exploram-se possíveis definições novas das operações binárias de soma e multiplicação em órbitas, e termina-se a seção observando a possibilidade de descrever o conjuntos naturais pela linguagem de órbitas em uma outra formulação do Axioma do Infinito.

2 Estruturas Iniciais

2.1 Conjuntos Invariantes e Órbitas

Seja S um conjunto não-vazio arbitrário e $s : S \longrightarrow S$ uma função. Um subconjunto $T \subset S$ é dito *fechado sob a função* s ou *invariante por* s, se, para todo $x \in T$, $s(x) \in T$; equivalentemente, se $s(T) \subset T$. Quando a função é evidente do contexto, denota-se simplesmente que $T \subset S$ é invariante.

Seja $\operatorname{inv}_s S$ definido como o conjunto de todos os subconjuntos invariantes por s de S:

$$\operatorname{inv}_s S := \{ \ T \subset S \mid s(T) \subset T \ \}$$

Quando a função tratada é evidente do contexto, denota-se simplesmente por $\operatorname{inv} S$. Perceba que $\operatorname{inv} S$ é não-vazio pois $\emptyset$ e S são invariantes, e é bem definido devido aos axiomas das partes e da compreensão restrita de ZFC. Analisa-se algumas propriedades de $\operatorname{inv} S$:

Proposição 2.1. *Se $(X_i)_{i\in I}$ é uma familia arbitrária de conjuntos invariantes, então $\bigcap_{i\in I} X_i$ e $\bigcup_{i\in I} X_i$ também são invariantes.*

Demonstração. Supondo os conjuntos envolvidos e a interseção não trivialmente vazios, então $x \in \bigcap_{i\in I} X_i \Rightarrow \forall i \in I,\, x \in X_i$. Então, por serem conjuntos invariantes, $\forall i \in I,\, s(x) \in X_i$. Assim, $s(x) \in \bigcap_{i\in I} X_i$, de modo que é invariante.

Agora, se $x \in \bigcup_{i\in I} X_i$, $\exists i \in I$ tal que $x \in X_i$, de modo que $s(x) \in X_i$. Portanto $s(x) \in \bigcup_{i\in I} X_i$, sendo conjunto invariante. □

Define-se agora sobre os elementos de S o conceito de órbita. A *órbita* de um elemento de S por s é definido como a interseção de todos os conjuntos invariantes por s que contém esse elemento:

$$\mathcal{O}(x, s) := \bigcap \{T \in \operatorname{inv}_s S \mid x \in T\}$$

A motivação por trás dessa definição é que ela captura, ao mesmo tempo, a ideia do menor conjunto invariante contendo x, e a ideia do conjunto composto exatamente das iterações de x por s: à respeito da primeira, se T é um subconjunto invariante de S por T e $x \in T$, então $\mathcal{O}(x, s) \subset T$. Quanto a segunda, todo elemento de S resultado de iterações de x por s deve, intuitivamente, estar em todo conjunto invariante que contém x. Assim, ao tomar a interseção de todos, deve-se restar apenas esses elementos.

A órbita de um elemento será um dos conceitos fundamentais a serem explorados e analisados nesssa ótica. Quando a função $s : S \to S$ é evidente do contexto, denota-se $\mathcal{O}(x, s)$ por $\mathcal{O}(x)$. Veja que a órbita será necessariamente um conjunto invariante, já que é interseção de família de conjuntos invariantes.

É possível estender o conceito de órbita para subconjuntos de S, sendo o menor conjunto invariante contendo tal subconjunto. Dado $A \subset S$,

$$\mathcal{O}(A, s) := \bigcap \{T \in \operatorname{inv}_s S \mid A \subset T\}$$

Em primeira abordagem, atenta-se apenas ao conceito de órbitas de elementos.

Proposição 2.2. *Dados $x \in S$ e T conjunto invariante de S, então $x \in T \iff \mathcal{O}(x) \subset T$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) é visto claramente. ($\Rightarrow$) veja que, se $x \in T$ e $T \in \operatorname{inv} S$, então pela definição de $\mathcal{O}(x)$ tem-se que $\mathcal{O}(x) \subset T$, já que é a interseção de todos os conjuntos invariantes aos quais x pertence. $\square$

Proposição 2.3. *Se $T \subset S$ é conjunto invariante, então $T = \displaystyle\bigcup_{x \in T} \mathcal{O}(x)$.*

Demonstração. Claramente $T \subset \bigcup_{x \in T} \mathcal{O}(x)$. Para demonstrar a inclusão inversa, veja que $z \in \bigcup_{x \in T} \mathcal{O}(x) \Rightarrow z \in \mathcal{O}(i)$ para algum $i \in T$. mas $i \in T \iff \mathcal{O}(i) \subset T$, de modo que $z \in T$. $\square$

Corolário 2.4. *Dados $x, y \in S$, $x \in \mathcal{O}(y) \iff \mathcal{O}(x) \subset \mathcal{O}(y)$.*

2.2 Relações por Órbitas

Munidos da definição de órbitas de elementos por uma função, pode-se introduzir relações possíveis entre os elementos do conjunto a partir das órbitas no conjunto. Percebe-se que, fundamentalmente, qualquer situação descrita a partir delas representa a estrutura gerada no conjunto subjacente pela função sobre ele, em respeito a elementos e suas iterações.

Dados dois elementos x, y de S, diz-se que x e y são *equiorbitais*, e denota-se isso por $x \overset{s}{=} y$, se $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

Proposição 2.5. *A relação $\overset{s}{=}$ é uma relação de equivalência em S.*

Demonstração. A demonstração das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva são simples em vista da igualdade de conjuntos. $\square$

Corolário 2.6. *Para $x, y \in S$, $x \overset{s}{=} y \iff x \in \mathcal{O}(y)$ e $y \in \mathcal{O}(x)$.*

Perceba então que a relação de equivalência de *equiorbitalidade* particiona S em classes de equivalência disjuntas, em que

$$\mathcal{E}(x) := \{y \in S \mid x \overset{s}{=} y\}$$

com $\mathcal{E}(x) \subset \mathcal{O}(x)$, mas não necessariamente $\mathcal{E}(x) = \mathcal{O}(x)$. De fato, $\mathcal{E}(x)$ não necessariamente é invariante, e pode até ocorrer que $\mathcal{E}(x) = \{x\}$, de exemplo intuitivo nos naturais $\mathbb{N}$ sob a operação sucessor.

Ainda mais relevante que a equiorbitalidade, pode-se sobre S uma relação que introduz uma noção de ordem, ou uma distribuição ordenada, dos elementos de S com respeito a suas órbitas e, por consequência, com respeito a s. Dados $x, y \in S$, define-se que *x é uma iteração de y*, e denota-se isso por $x \overset{s}{\geq} y$, se $x \in \mathcal{O}(y)$.

Uma definição que já foi provada ser equivalente é que

$$x \overset{s}{\geq} y \iff \mathcal{O}(x) \subset \mathcal{O}(y).$$

Veja que tal relação descreve a órbita de um elemento como exatamente o conjunto de suas iterações por s, representando formalmente a ideia intuitiva dada pela definição de órbita.

Proposição 2.7. *A relação* $\overset{s}{\geq}$ *é uma relação de pré-ordem em* S*, e se* $x \overset{s}{\geq} y$ *e* $y \overset{s}{\geq} x$*, então* $x \overset{s}{=} y$*.*

Demonstração. Vê-se que $x \in \mathcal{O}(x)$ sempre, e a antissimetria deriva das definições simples. Para a transitividade, usa-se simplesmente a transitividade da relação de inclusão de conjuntos como vista na definição alternativa da pré-ordem. □

Pode-se ver também que a relação induzida $\mathcal{E}(x) \geq \mathcal{E}(y) \iff x \overset{s}{\geq} y$ define uma relação de ordem parcial no conjunto das classes de equivalência pela equiorbitalidade.

Corolário 2.8. *Dados* $x, y \in S$*,* $x \overset{s}{\geq} y \Rightarrow s(x) \overset{s}{\geq} y$*.*

Enunciam-se lemas importantes para demonstrar as propriedades que, intuitivamente, pensa-se que a pré-ordem $\overset{s}{\geq}$ deveria ter, com respeito às ideias de iterações e ordenações dadas por s em S.

Lema 2.9. *Dado* $x \in S$*, tem-se* $s(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(s(x))$*.*

Demonstração. Prova-se que $\mathcal{O}(s(x)) \subset s(\mathcal{O}(x))$ prontamente: de fato, $s(x) \in s(\mathcal{O}(x))$, e bastar provar que $s(\mathcal{O}(x))$ é invariante. Se $y \in s(\mathcal{O}(x))$, $\exists z \in \mathcal{O}(x)$ tal que $s(z) = y$. Assim, como $\mathcal{O}(x)$ é invariante, $y \in \mathcal{O}(x)$, de modo que $s(y) \in s(\mathcal{O}(x))$.

Para mostrar que $s(\mathcal{O}(x)) \subset \mathcal{O}(s(x))$, mostra-se que, se T é conjunto invariante e $s(x) \in T$, então $s(\mathcal{O}(x)) \subset T$. Assim, $s(\mathcal{O}(x))$ estaria contido na interseção de todos tais T, de modo que estaria contido em $\mathcal{O}(s(x))$. Para tal, veja que $\mathcal{O}(x) \subset T \cup \{x\}$, já que $T \cup \{x\}$ é invariante e x pertence a ele. Assim, como $s(\mathcal{O}(x)) \subset s(T \cup \{x\})$, basta mostrar que $s(T \cup \{x\}) \subset T$. Se $y \in T \cup \{x\}$, então $s(y) = s(x) \in T$ ou $y \neq x$ e $y \in T \Rightarrow s(y) \in T$, pois T é invariante. □

Proposição 2.10. $\mathcal{O}(x) = s(\mathcal{O}(x)) \cup \{x\}$*. Ou seja, se* $y \in \mathcal{O}(x)$ *e* $y \neq x$*, então* $y \in s(\mathcal{O}(x))$*.*

Demonstração. Dado $y \in \mathcal{O}(x)$, suponha que $y \notin s(\mathcal{O}(x))$ e $y \neq x$. Considera-se então o conjunto $T = \mathcal{O}(x) \setminus \{y\}$. Vê-se que $x \in T$, e que T é invariante; se $k \in T$, $s(k) \neq y$ pois $y \notin s(\mathcal{O}(x))$, e portanto $s(k) \in T$. Assim, da definição de $\mathcal{O}(x)$, $\mathcal{O}(x) \subset T$, uma contradição devido ao fato de $y \in \mathcal{O}(x)$. Assim, $y \in s(\mathcal{O}(x))$. □

Corolário 2.11. *Se* $x \overset{s}{\geq} y$ *e* $x \overset{s}{\ngeq} s(y)$*, então* $x = y$*.*

Demonstração. Suponha $x \overset{s}{\geq} y$ e $x \overset{s}{\ngeq} s(y)$. Daí, conclui-se que $x \in \mathcal{O}(y)$ e $x \notin \mathcal{O}(s(y)) = s(\mathcal{O}(y))$. Pela proposição anterior, conclui-se então que $x = y$. □

Proposição 2.12. *Dados* $x, y \in S$*,* $x \overset{s}{\geq} y \Rightarrow s(x) \overset{s}{\geq} s(y)$*.*

Demonstração. Dado $x \overset{s}{\geq} y$, vê-se que ou $x \overset{s}{\geq} s(y)$, concluindo facilmente o que deseja-se demonstrar por $s(x) \overset{s}{\geq} x$, ou $x \overset{s}{\ngeq} s(y)$. Nesse caso, tem-se pelo lema anterior que $x = y$, e portanto $s(x) \overset{s}{\geq} s(y)$ trivialmente. □

Observa-se que há contra-exemplos para a recíproca dessa proposição caso a função não seja injetora, de exemplo em $\mathbb{N} \cup \{a, b\}$ dois elementos não naturais tais que $s(n) = n$ e $s(a) = s(b) = 0$.

Teorema 2.13. *Dado $x \in S$, $\mathcal{O}(x)$ é uma cadeia na relação de pré-ordem $\overset{s}{\geq}$; ou seja, em $\mathcal{O}(x)$, quaisquer dois elementos são comparáveis sob $\overset{s}{\geq}$, e portanto $\overset{s}{\geq}$ é total/linear em $\mathcal{O}(x)$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathcal{O}(x)$. Portanto $a, b \overset{s}{\geq} x$. Quer-se provar que a e b são comparáveis; ou seja, $a \overset{s}{\geq} b$ ou $b \overset{s}{\geq} a$. Suponha por contradição que $a \overset{s}{\ngeq} b$ e $b \overset{s}{\ngeq} a$. Considera-se então o conjunto $J = \{z \in \mathcal{O}(x) \mid a \overset{s}{\geq} z \text{ e } b \overset{s}{\geq} z\}$. Veja que $x \in J$, e prova-se que J é invariante.

De fato, suponha que $z \in J$, portanto $a, b \overset{s}{\geq} z$. Se $a \overset{s}{\ngeq} s(z)$, dos lemas anteriores vê-se que então $a = z$, e portanto $b \overset{s}{\geq} a$, contradizendo nossa hipótese. Assim, $a \overset{s}{\geq} s(z)$, e em raciocínio análogo $b \overset{s}{\geq} s(z) \Rightarrow s(z) \in J$. Dessa maneira, J é invariante e $x \in J \Rightarrow \mathcal{O}(x) \subset J$. Mas então $a \in J \Rightarrow b \overset{s}{\geq} a$, contradizendo a hipótese. Assim, por contradição, o teorema vale. $\square$

Havendo definido o conceito de órbita de um elemento $x \in S$, define-se sua *pré-órbita*, ou *precedência*:

$$\mathcal{P}(x) := \{p \in S \mid x \overset{s}{\geq} p\}.$$

Intuitivamente, é o conjunto dos elementos de S que precedem x na pré-ordem, ou seja, os elementos para os quais x é uma iteração, interagindo dualmente com a órbita $\mathcal{O}(x)$ de x. Perceba que $\mathcal{E}(x) \subset \mathcal{P}(x)$.

Lema 2.14. *$\mathcal{P}(x) \cap \mathcal{O}(x) = \mathcal{E}(x)$, o conjunto dos elementos equiorbitais com x, e $\mathcal{P}(x) \cup \mathcal{O}(x)$ é o conjunto dos elementos comparáveis com x na pré-ordem.*

Demonstração. A demonstração é feita prontamente das definições: de fato, se $z \in \mathcal{P}(x) \cap \mathcal{O}(x)$, então $x \overset{s}{\geq} z$ e $z \overset{s}{\geq} x \Rightarrow x \overset{s}{=} z$, com a volta evidente. Para elementos comparáveis, veja que $z \overset{s}{\geq} x$ ou $x \overset{s}{\geq} z$. $\square$

2.3 Órbitas Cíclicas

Dado $x \in S$, define-se que a órbita $\mathcal{O}(x)$ é *cíclica* se $x \in s(\mathcal{O}(x))$, ou seja, $s(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(x)$. Desse modo, é como se x fosse uma iteração não-trivial de si próprio, e, após a aplicação de s uma quantidade suficiente de vezes, houvesse um retorno ao próprio elemento.

Tal definição captura a ideia de que a órbita do elemento tem, intuitivamente, um aspecto periódico, em que o elemento está num ciclo por meio de s, embora não tenham-se ainda as ferramentas necessárias para capturar as ideias de período e quantidade. Essas serão desenvolvidas em seções posteriores.

A ideia de ciclicidade de uma órbita intui também que os elementos dessa órbita não podem ser distinguidos significativamente apenas por meio das relações induzidas por s, já que todos tem suas propriedades de certo modo compartilhadas. Isto é revelado na relação de equiorbitalidade que esses elementos da órbita assumem.

Teorema 2.15. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathcal{O}(x)$ é cíclica;*

2. *x é iteração de $s(x)$;*

3. *$\mathcal{P}(x)$ é conjunto invariante;*

4. *$\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{P}(x)$;*

5. *$\mathcal{O}(x) = \mathcal{E}(x)$, ou seja, todos os elementos de $\mathcal{O}(x)$ são equiorbitais, de órbita $\mathcal{O}(x) = \mathcal{E}(x)$.*

Demonstração. Perceba que todas as afirmações implicam em 2, bastando provar que 2 implica nas outras. A equivalência entre 1 e 2 deriva das definições da relação de pré-ordem, Junto de lema anterior que $s(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(s(x))$. Suponha então que $x \overset{s}{\geq} s(x)$. Veja que, se $p \in \mathcal{P}(x)$, $x \overset{s}{\geq} p$, e por lema anterior, $s(x) \overset{s}{\geq} s(p)$, seguindo de transitividade que $x \overset{s}{\geq} s(p)$ e que, então, $\mathcal{P}(x)$ é invariante.

Como $x \in \mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{P}(x)$ é invariante, então $\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{P}(x)$. E de $\mathcal{P}(x) \cap \mathcal{O}(x) = \mathcal{E}(x)$, tem-se que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{E}(x)$. □

Perceba que, por 5, a característica da órbita $\mathcal{O}(x)$ ser cíclica independe de $z \in \mathcal{O}(x)$, pois todos os elementos $z \in \mathcal{O}(x)$ compartilham uma mesma órbita, essa cíclica. Assim, pode-se denotar órbitas cíclicas de S simplesmente por $\mathcal{O}$, já que $\forall x \in \mathcal{O}, \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}$ está implícito, e para cada $z \in \mathcal{O}$, $z \overset{s}{\geq} s(z)$.

Corolário 2.16. *Se $\mathcal{O} \subset S$ é uma órbita cíclica, então para todo $x \in \mathcal{O}$, existe $z \in \mathcal{O}$ tal que $s(z) = x$.*

Demonstração. Como $\mathcal{O}$ é órbita cíclica, $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(s(x)) = s(\mathcal{O}(x))$. Assim, $x \in s(\mathcal{O}(x))$, de modo que o lema segue naturalmente. □

Corolário 2.17. *Se $a \neq b$ e $a \overset{s}{=} b$, então $\mathcal{O}(a)$ é órbita cíclica.*

Demonstração. Como $b \overset{s}{\geq} a$ e $b \neq a$, tem-se $b \overset{s}{\geq} s(a)$. Mas $a \overset{s}{\geq} b$, então por transitividade $a \overset{s}{\geq} s(a)$, mostrando então que $\mathcal{O}(a)$ é cíclica. □

Corolário 2.18. $x \overset{s}{\ngeq} s(x) \iff \mathcal{P}(x) \cap \mathcal{O}(s(x)) = \emptyset$.

Teorema 2.19. *Se $x \overset{s}{\ngeq} s(x)$, então $x \overset{s}{=} y \iff x = y$; ou seja, $\mathcal{E}(x) = \{x\}$.*

Demonstração. O primeiro teorema decorre das definições. Para o segundo, suponha que $x \overset{s}{\geq} y$ e $y \overset{s}{\geq} x$. Daí, tem-se dois casos: ou $x \overset{s}{\ngeq} s(y)$, que de lema anterior implica em $x = y$, ou $x \overset{s}{\geq} s(y)$. Mas também tem-se que $s(y) \overset{s}{\geq} s(x)$, e por transitividade $x \overset{s}{\geq} s(x)$, absurdo. □

2.4 O Caso da Injetividade

Deseja-se analisar os conceitos e propriedades já vistos sob outras visões da função $s : S \to S$; mais especificamente, trata-se o caso de ela ser **injetora**, restringindo sua generalidade mas ampliando as possibilidades de estudo dela.

Proposição 2.20. *Suponha $s : S \to S$ injetora. Sejam $x, y \in S$ tais que $x \overset{s}{\ngeq} y$ mas $s(x) \overset{s}{\geq} y$. Então $s(x) = y$.*

Demonstração. veja que $s(x) \in \mathcal{O}(y)$. Se $s(x) \neq y$, então de lema anterior tem-se que $s(x) \in s(\mathcal{O}(y)) = \mathcal{O}(s(y))$. Mas então existe $z \in \mathcal{O}(y)$ tal que $s(x) = s(z)$, e como s é injetora, $x = z$. Mas então $x \in \mathcal{O}(y)$, contradição. $\square$

Veja que há contra-exemplo nessa proposição quando a função s não é injetora, tomando $\mathbb{N} \cup \{x\}$, x elemento não natural tal que $s(n) = n + 1$ para n natural mas $s(x) = 3$. De fato, $x \overset{s}{\ngeq} 1$ e $s(x) = 3 \overset{s}{\geq} 1$, mas $x \neq 1$.

Corolário 2.21. *Supondo $s : S \longrightarrow S$ injetora, $x \overset{s}{\geq} y \iff s(x) \overset{s}{\geq} s(y)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) já foi previamente demonstrado. Para ($\Leftarrow$), deve-se usar o fato de s ser injetora. Há dois casos: $x \overset{s}{\geq} s(y)$, em que demonstra-se $x \overset{s}{\geq} y$ por transitividade, ou $x \overset{s}{\ngeq} s(y)$. Neste último, usa-se a proposição anterior para concluir que $s(x) = s(y)$, e portanto $x = y$, em que trivialmente $x \overset{s}{\geq} y$. $\square$

Com a condição de órbitas cíclicas descritas por $x \overset{s}{\geq} s(x)$, pode-se ver como órbitas cíclicas se comportam com respeito a uma função injetora. Intuitivamente, a ocorrência de órbitas cíclicas ainda é possível, mas é restringida a casos mais específicos, onde a linearidade não-trivial de $\overset{s}{\geq}$ tende a ser preservada. Assim, pensa-se em quais órbitas seriam não-cíclicas em decorrência de outras serem não-cíclicas.

Proposição 2.22. *Se $s : S \to S$ é injetora, o conjunto $T = \{x \in S \mid x \overset{s}{\ngeq} s(x)\}$ é invariante.*

Demonstração. Suponha $x \in T$, ou seja, $x \overset{s}{\ngeq} s(x)$. Suponha por contradição ainda que $s(x) \overset{s}{\geq} s(s(x))$. Assim, $s(x) \in \mathcal{O}(s(s(x))) = s(\mathcal{O}(s(x)))$. Mas então existe $y \in \mathcal{O}(s(x))$ tal que $s(x) = s(y)$. Como s é injetora, $x = y$, portanto $x \in \mathcal{O}(s(x))$, uma contradição. $\square$

Corolário 2.23. *Suponha $s : S \longrightarrow S$ injetora. Se a órbita $\mathcal{O}(x)$ é não-cíclica, então para toda iteração y de x tem-se que a órbita $\mathcal{O}(y)$ é não-cícica.*

Teorema 2.24. *Suponha $s : S \longrightarrow S$ injetora. Então, em uma órbita $\mathcal{O}(x)$ não-cíclica, a relação de pré-ordem total $\overset{s}{\geq}$ é uma relação de ordem total.*

Demonstração. Basta ver a antissimetria da relação com as dadas condições. Relembrando o teorema 2.19 e o corolário 2.23, veja que $\forall z \in \mathcal{O}(x)$, $z \overset{s}{=} y \iff z = y$. Mas $z \overset{s}{=} y \iff z \overset{s}{\geq} y$ e $y \overset{s}{\geq} z$, demonstrando a antissimetria. Que a relação de ordem é total foi visto no teorema de $\mathcal{O}(x)$ ser cadeia. □

Teorema 2.25. *Suponha $s : S \to S$ injetora. Então, para todo $x \in S$, $\mathcal{P}(x)$ é uma cadeia. Portanto, $\mathcal{P}(x) \cup \mathcal{O}(x)$ é uma cadeia.*

Demonstração. Para mostrar que quaisquer dois elementos de $\mathcal{P}(x)$ são comparáveis, dado s injetora, tome $x \overset{s}{\geq} a$ e $x \overset{s}{\geq} b$. Para provar que a, b são comparáveis, prova-se primeiro que se a, b são incomparáveis, então, $\forall a' \in \mathcal{O}(a)$, a', b são incomparáveis.

A prova é feita pela invariância de $\mathcal{O}(a)$, e de sua descrição como órbita. De fato, pela própria premissa a e b são incomparáveis. Supondo k e b incomparáveis, suponha por contradição $s(k)$ e b comparáveis. Se $b \overset{s}{\geq} s(k)$, então $b \overset{s}{\geq} k$ por transitividade, absurdo. Se $s(k) \overset{s}{\geq} b$, então como $k \overset{s}{\ngeq} b$, pelo lema 2.20 tem-se $s(k) = b$, absurdo, pois então $b \overset{s}{\geq} k$. Assim, $s(k)$ e b não são comparáveis, e portanto nenhum elemento da órbita $\mathcal{O}(a)$ é comparável com b. Mas isso gera uma contradição, pois $x \in \mathcal{O}(a)$, e $x \overset{s}{\geq} b$. □

Um comentário a ser feito é que muitas das demonstrações acerca da caracterização de órbitas assemelham-se a demonstrações por indução, exatamente ao explorar tal tipo de situação em seu primórdio como nascente da invariância por s. Essa ideia é explorada mais a fundo posteriormente, ao abordar os ditos sistemas de Peano como descritos por Leon Henkin em [1].

Deste modo, toma-se a liberdade de futuramente mencionar demonstrações por *indução* nesse contexto de órbitas e de tais métodos.

Em vista de tal propriedade para $s : S \to S$ injetora, Faz-se referencia especial ao conjunto $\mathcal{P}(x) \cup \mathcal{O}(x)$, a partir de agora denotado por $\mathcal{C}(x)$, o conjunto de todos os elementos comparáveis com x na pré-ordem $\overset{s}{\geq}$.

Proposição 2.26. *Suponha $s : S \to S$ injetora. Então $\forall z \in \mathcal{C}(x)$, $\mathcal{C}(z) = \mathcal{C}(x)$.*

Demonstração. Basta provar que $\forall y \in S$, y é comparável com $x \iff y$ é comparável com z. Divide-se o problema em casos:

Suponha $z \overset{s}{\geq} x$. Para ($\Leftarrow$), suponha $y \overset{s}{\geq} z$. Por transitividade, $y \overset{s}{\geq} x$. suponha $z \overset{s}{\geq} y$; então $x, y \in \mathcal{P}_z$, sendo portanto comparáveis. Para ($\Rightarrow$), suponha $y \overset{s}{\geq} x$. Então $y, z \in \mathcal{O}(x)$, sendo portanto comparáveis. E se $x \overset{s}{\geq} y$, $z \overset{s}{\geq} y$ por transitividade.

Para o segundo caso, suponha $x \overset{s}{\geq} z$. O raciocínio é análogo ao anterior. Para ($\Leftarrow$), suponha $y \overset{s}{\geq} z$. Então $x, y \in \mathcal{O}_z$, sendo então comparáveis. Supondo $z \overset{s}{\geq} y$, por transitividade $x \overset{s}{\geq} y$. Para ($\Rightarrow$), assuma $y \overset{s}{\geq} x$. Então por transitividade $y \overset{s}{\geq} z$. E se $x \overset{s}{\geq} y$, tem-se $z, y \in \mathcal{P}(x)$, sendo então comparáveis. □

Corolário 2.27. *Suponha $s : S \to S$ injetora, e $a, b \in S$ elementos incomparáveis. Então qualquer elemento de $\mathcal{C}(a)$ é incomparável com qualquer elemento de $\mathcal{C}(b)$.*

Assim, S é particionado em classes de equivalência quanto à comparabilidade de seus elementos pela relação $\overset{s}{\geq}$, com partes distintas totalmente incomparáveis.

Demonstração. Se z for comparável a a e comparável a b, então $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(z) = \mathcal{C}(b)$, de modo que a e b seriam comparáveis, absurdo. $\square$

3 O Conjunto das Iteradas

3.1 A construção Inicial

Para expandir a teoria vista até agora, realiza-se uma construção específica sobre o conjunto das funções de S em S. Do mesmo modo que foi possível formalizar a ideia das iterações de um elemento por s, intui-se a possibilidade de formalizar a definição das *iteradas* de s, ou seja, as funções resultantes de composição sucessiva de s com ela mesma.

Seja $\mathcal{F} = S^S$ o conjunto das funções de domínio e contradomínio em S, este sendo bem definido pelo axioma das partes e da compreensão restrita sobre $S \times S$. Define-se a função

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f &\longmapsto s \circ f \end{aligned}$$

e toma-se o conjunto

$$\mathcal{I}_s := \mathcal{O}(\phi, \mathrm{id}_S) = \bigcap \{\mathcal{G} \in \mathrm{inv}_\phi \, \mathcal{F} \mid \mathrm{id}_S \in \mathcal{G}\}$$

onde id_S é a função identidade em S. Perceba que $\mathcal{I}_s$ traz a ideia intuitiva de representar as iteradas de s como funções compostas por s, sem identificá-las explicitamente, exatamente como feito com as iterações pela órbita. Para facilidade, denota-se composição de funções por concatenação.

Como $\mathcal{I}_s$ ainda é uma órbita, pode-se utilizar métodos anteriores para demonstrações com base nas definições envolvidas. Fundamentalmente, se $\mathrm{id}_S \in \mathcal{G} \subset \mathcal{I}_s$ e $\mathcal{G} \in \mathrm{inv}_\phi \, \mathcal{F}$, então $\mathcal{G} = \mathcal{I}_s$.

Teorema 3.1. *$s : S \to S$ é injetora $\iff$ $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é injetora.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha $\phi(f) = \phi(g) \Rightarrow sf = sg$, para $f, g \in \mathcal{F}$. Então, $\forall x \in S, s(f(x)) = s(g(x))$, e como s é injetora, $\forall x \in S$ tem-se $f(x) = g(x)$, de modo que $f = g$.

($\Leftarrow$) Suponha $s(x) = s(y)$. Seja $f \in \mathcal{F}$ a função que mapeia todo elemento de S em x, e $g \in \mathcal{F}$ a função que mapeia todo elemento de S em y. Assim, $s(f(z)) = s(g(z))\ \forall z \in S$, de modo que $sf = sg$. Então, por hipótese, $f = g$, de modo que $x = y$. □

Lema 3.2. *$\forall f \in \mathcal{I}_s$, tem-se $sf = fs$.*

Demonstração. Sendo $\mathcal{G}$ o conjunto das funções de $\mathcal{I}_s$ que comutam com s, demonstra-se que $\mathrm{id}_S \in \mathcal{G}$ e que $\mathcal{G}$ é invariante por ϕ. De fato, $(\mathrm{id}_S)s = s(\mathrm{id}_S) = s$, e se $fs = sf$, então $s(fs) = s(sf) \Rightarrow (sf)s = s(sf)$, mostrando que sf e s comutam. Lembre que $\phi(f) = sf$. □

Proposição 3.3. *$\forall f, g \in \mathcal{I}_s$, tem-se $fg = gf$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H}$ o conjunto das funções de $\mathcal{I}_s$ que comutam com $f \in \mathcal{I}_s$. claramente $\mathrm{id}_S \in \mathcal{H}$, pois $(\mathrm{id}_S)f = f(\mathrm{id}_S) = f$, e se $gf = fg$, então $s(gf) = s(fg) \Rightarrow (sg)f = (sf)g = (fs)g = f(sg)$, mostrando que f e sg comutam. Como f foi escolhida arbitrariamente em $\mathcal{I}_s$, todas as funções de $\mathcal{I}_s$ comutam. □

Proposição 3.4. *$\mathcal{I}_s$ é um monóide comutativo sob composição de funções, com elemento neutro* id_S*.*

Demonstração. Como a operação de composição é naturalmente associativa, $\mathrm{id}_S\, f = f\, \mathrm{id}_S = f$ para todo $f \in \mathcal{I}_s$ e já demonstrou-se ser comutativa a operação, basta mostrar que se $f, g \in \mathcal{I}_s$, então $fg \in \mathcal{I}_s$. Dada função $f \in \mathcal{I}_s$, Seja $\mathcal{J}$ o conjunto das funções $g \in \mathcal{I}_s$ tais que $fg \in \mathcal{I}_s$.

Vê-se que $\mathrm{id}_S \in \mathcal{J}$, pois $f(\mathrm{id}_S) = (\mathrm{id}_S)f = f \in \mathcal{I}_s$. Se $g \in \mathcal{J}$, então $fg \in \mathcal{I}_s$. Mas então $f(sg) = (fs)g = (sf)g = s(fg) \in \mathcal{I}_s$, então $sg \in \mathcal{J}$, mostrando ser invariante e portanto igual a $\mathcal{I}_s$. Como $f \in \mathcal{I}_s$ foi escolhida arbitrariamente, toda composição de funções de $\mathcal{I}_s$ também está em $\mathcal{I}_s$. $\square$

Proposição 3.5. *Se $f \in \mathcal{I}_s$, então $x \overset{\mathrm{s}}{\geq} y \Rightarrow f(x) \overset{\mathrm{s}}{\geq} y$, para todos $x, y \in S$.*

Demonstração. Basta ver novamente pela indução no subconjuto de $\mathcal{I}_s$ das funções que satisfazem tal propriedade. $\square$

Corolário 3.6. *Dado $x \in S$, para toda iteração y de x e para toda função $f \in \mathcal{I}_s$, tem-se que $\mathcal{O}(y, f) \subset \mathcal{O}(x, s)$.*

Demonstração. Basta ver que $y \in \mathcal{O}(x, s)$ e que $\mathcal{O}(x, s)$ é invariante por f. De fato, essa é exatamente a conclusão da proposição anterior. $\square$

Proposição 3.7. *Suponha $s : S \to S$ injetora. Então, $\forall f \in \mathcal{I}_s$, f é injetora. O mesmo vale para injetividade apenas em restrições a subconjuntos específicos de S.*

Demonstração. Para a proposição, basta ver que o subconjunto das funções injetoras de $\mathcal{I}_s$ contém id_S e é invariante: isto dá-se pela composição de funções injetoras ser injetora. $\square$

Proposição 3.8. *Suponha $s : S \to S$ injetora. Então, para toda função $f \in \mathcal{I}_s$, vale que $f(x) \overset{\mathrm{s}}{\geq} f(y) \iff x \overset{\mathrm{s}}{\geq} y$.*

Demonstração. Novamente, basta ver que o conjunto das funções de $\mathcal{I}_s$ que satisfazem tal propriedade e contém id_S é invariante. Se $t(x) \overset{\mathrm{s}}{\geq} t(y) \iff x \overset{\mathrm{s}}{\geq} y$, então $st(x) \overset{\mathrm{s}}{\geq} st(y) \iff t(x) \overset{\mathrm{s}}{\geq} t(y) \iff x \overset{\mathrm{s}}{\geq} y$. $\square$

Teorema 3.9. *Dados $x, y \in S$ com $y \in \mathcal{O}(x)$, existe $f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = y$.*

Demonstração. Usa-se raciocínio análogo ao anterior, tomando T conjunto dos elementos z de $\mathcal{O}(x)$ tais que $\exists f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = z$, e provou-se que T contém x e é invariante, portanto $\mathcal{O}(x) \subset T \subset \mathcal{O}(x) \Rightarrow T = \mathcal{O}(x)$.

Veja que $\mathrm{id}_S \in \mathcal{I}_s$ e $\mathrm{id}_S(x) = x$, portanto $x \in T$. Se $z \in T$, existe $f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = z$. Mas então $sf(x) = s(z)$, existindo $sf \in \mathcal{I}_s$ tal que $sf(x) = s(z)$, demonstrando a indutividade. $\square$

O teorema acima intui a situação de correspondência entre as iterações de um elemento com o conjunto das iteradas da função. Assim, cada iteração tem uma (não necessariamente única) iterada correspondente a ele, fortalecendo a ideia da iteração ser em certo sentido atingível pelo elemento, agora na forma de uma função resultante de várias composições.

Corolário 3.10. *Para todos $a, b \in S$, vale:*

- $a \overset{s}{\geq} b \iff$ *existe* $f \in \mathcal{I}_s$ *tal que* $f(b) = a$;
- $a \in \mathcal{P}(b) \iff$ *existe* $f \in \mathcal{I}_s$ *tal que* $f(a) = b$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, ($\Rightarrow$) é o teorema anterior, e para ($\Leftarrow$), basta ver que o conjunto $T = \{z \in \mathcal{O}(x) \mid \exists f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = z\}$ contém x como elemento e é invariante. A segunda afirmação é um desdobramento da primeira.

□

Veja que, como $\mathcal{I}_s = \mathcal{O}(\phi, \mathrm{id}_S)$ é uma órbita, pode-se instituir uma relação de pré-ordem análoga a $\overset{s}{\geq}$, no caso $\overset{\phi}{\geq}$, com definições e propriedades análogas. De fato, como $\mathcal{I}_s$ é órbita, a relação $\overset{\phi}{\geq}$ é uma pré-ordem total sobre $\mathcal{I}_s$.

Corolário 3.11. *$\mathcal{I}_s$ é uma cadeia na pré-ordem $\overset{\phi}{\geq}$; ou seja, quaisquer duas funções $f, g \in \mathcal{I}_s$ são comparáveis sob $\overset{\phi}{\geq}$.*

3.2 Uma Construção Adicional

Vê-se que a construção do conjunto das iteradas de s foi feita a partir da aplicação das ideias das órbitas em $S^S = \mathcal{F}$ e de composição por s. Assim, nada impede construções superiores, feitas no próprio conjunto das funções $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$, mas claramente ainda com relações fortes à ideias iniciais de composição por s. É possível então definir um conjunto $\mathcal{I}_\phi$ analogamente a $\mathcal{I}_s$: dado o conjunto $\mathcal{L} = \mathcal{F}^{\mathcal{F}}$ das funções de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}$, define-se

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ \tau &\longmapsto \phi \circ \tau \end{aligned}$$

em que

$$\mathcal{I}_\phi = \mathcal{O}(\theta, \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) = \bigcap \{\mathcal{T} \in \mathrm{inv}_\theta \, \mathcal{L} \mid \mathrm{id}_{\mathcal{F}} \in \mathcal{T}\}$$

Note que a função $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ nesse caso representa a função identidade de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}$. Pode-se considerar até $\mathcal{I}_s$ como uma estrutura algébrica análoga a um módulo sobre $\mathcal{I}_\phi$, mas com distintas diferenças.

Percebe-se logo, no entanto, algo interessante nessa segunda construção que a torna imediatamente comunicante com a primeira, pelo seguinte teorema:

Teorema 3.12. *Para toda função $\varphi \in \mathcal{I}_\phi$, existe uma única função $h \in \mathcal{I}_s$ tal que, para toda função $f : S \longrightarrow S$, tem-se $\varphi(f) = hf$.*

Demonstração. A prova dá-se por indução no subconjunto de funções φ de $\mathcal{I}_\phi$ que satisfazem tal propriedade, mostrando tal subconjunto conter a identidade e ser invariante.

De fato, $\mathrm{id}_S(f) = f$, e se $\varphi(f) = hf \ \forall f \in S^S$, então $(\theta(\varphi))(f) = (\phi\varphi)(f) = \phi(\varphi(f)) = \phi(hf) = s(hf) = (sh)f$, $\forall f \in S^S$.

A unicidade de h e vista em que, se para $\varphi \in \mathcal{I}_\phi$ tem-se $\varphi(f) = hf = h'f$ para toda $f \in \mathcal{I}_s$, então tomando $f = \mathrm{id}_S$, tem-se $h = h'$. □

Corolário 3.13. *Para todas $f, g, k \in \mathcal{I}_s$, vale que:*

- $f \overset{\phi}{\geq} g \iff$ *existe* $h \in \mathcal{I}_s$ *tal que* $f = hg$;
- $f \overset{\phi}{\geq} g \Rightarrow kf \overset{\phi}{\geq} kg$;
- $f \overset{\phi}{\geq} g \Rightarrow f(x) \overset{\mathrm{s}}{\geq} g(x)$, $\forall x \in S$.

Demonstração. Veja que demonstrou-se previamente que $f \overset{\phi}{\geq} g \iff \exists \varphi \in \mathcal{I}_\phi$ tal que $f = \varphi(g)$. Mas do teorema anterior, existe $h \in \mathcal{I}_s$ tal que $f = \varphi(g) = hg$.

Para a segunda propriedade, basta observar que se $f = gj$, então $hf = (hg)j$.

E para a terceira, $f \overset{\phi}{\geq} g$ implica na existência de $h \in \mathcal{I}_s$ tal que $f = hg$. Daí, comparando-se $hg(x) = h(g(x))$ e $g(x)$, percebe-se que $h(g(x)) \in \mathcal{O}(g(x))$, pois existe função f de $\mathcal{I}_s$ tal que $f(g(x)) = h(g(x))$, especificamente $f = h$. □

Enuncia-se o teorema que resume em grande parte os efeitos da construção de $\mathcal{I}_s$ sobre órbitas cíclicas:

Teorema 3.14. $\mathcal{O} \subset S$ *é órbita cíclica* $\iff \forall x, y \in \mathcal{O}$, *existe* $f \in \mathcal{I}_s$ *tal que* $f(x) = y$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Veja que, dado $x \in \mathcal{O}$, pode-se tomar $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}$, e para todo $y \in \mathcal{O} = \mathcal{O}(x)$, tem-se $y \overset{\mathrm{s}}{\geq} x$. Daí, pelo corolário 3.10, existe $f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = y$.

($\Leftarrow$) Veja que, também por 3.10, $\forall x, y \in \mathcal{O}$, $y \overset{\mathrm{s}}{\geq} x$, de modo que facilmente conclui-se todos os elementos de $\mathcal{O}$ serem equiorbitais. □

3.3 A Identificação entre Órbitas e Iteradas

Um comentário relevante a ser feito é que, quando considera-se o comportamento de s e de suas iteradas exclusivamente em $\mathcal{O}(x)$, encontra-se mais regularidade e correlações possíveis. Assim, quando tem-se $S = \mathcal{O}(x)$ para algum distinto x em S, ou equivalentemente considerando a restrição $s|_{\mathcal{O}(x)}$, e identificando-a como uma $s' : S' \longrightarrow S'$, $S' = \mathcal{O}(x)$, tem-se identificações ainda mais fortes a serem feitas.

Teorema 3.15 (Identificação entre órbitas e iteradas). *Supondo $S = \mathcal{O}(x)$ para algum $x \in S$, e com $s : S \longrightarrow S$, tem-se uma bijeção canônica*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{I}_s & \longrightarrow & \mathcal{O}(x) \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

que independe da forma de $\mathcal{O}(x)$; Ainda, tal bijeção preserva as pré-ordenações $\overset{s}{\geq}$ e $\overset{\phi}{\geq}$.

Demonstração. A sobrejetividade é vista pelo corolário 3.10, e a injeção é vista em que se $f(x) = g(x)$, então, para todo $y \in S = \mathcal{O}(x)$, existe $h \in \mathcal{I}_s$ tal que $h(x) = y$; daí, $h(f(x)) = h(g(x)) \Rightarrow f(h(x)) = g(h(x)) \Rightarrow f(y) = g(y)$, de modo que $f = g$.

Ainda, vê-se que $f \overset{\phi}{\geq} g \iff f(x) \overset{s}{\geq} g(x)$; ($\Rightarrow$) foi visto anteriormente, e para ($\Leftarrow$), tem-se de antes também que ou $f \overset{\phi}{\geq} g$ ou $g \overset{\phi}{\geq} f$. Se $f \overset{\phi}{\geq} g$, está demonstrado; se $g \overset{\phi}{\geq} f$, então $g(x) \overset{s}{\geq} f(x)$, de modo que ou $f = g$ ou $f(x)$ e $g(x)$ compõem uma mesma órbita cíclica. Assim, existe $k \in \mathcal{I}_s$ tal que $kg(x) = f(x)$: daí, para todo $y \in \mathcal{O}(x)$, $kg(y) = f(y)$ (pois $y = h(x)$ e $kgh = hkg$), de modo que $kg = f \Rightarrow f \overset{\phi}{\geq} g$. □

Por meio desse teorema, tem-se a consolidação do conjunto das iteradas como uma cópia do próprio conjunto das iterações de x, contanto que as iteradas sejam tomadas apenas com respeito a esse conjunto.

Na próxima seção explora-se como essa identificação fornece um meio fácil para transpor a estrutura algébrica pré-existente do conjunto das iteradas para o conjunto das iterações, sugerindo realmente a possibilidade de uma estrutura algébrica em S com respeito a s.

Proposição 3.16. *Suponha $s : S \to S$ injetora, e $\mathcal{O}(x)$ órbita não-cíclica. Então, $y \overset{s}{\geq} x \iff \exists! f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = y$.*

Demonstração. Dos teoremas de antes, basta demonstrar a unicidade de f; suponha $f(x) = g(x)$, $f, g \in \mathcal{I}_s$. Mas sabe-se que $f \overset{\phi}{\geq} g$ ou $g \overset{\phi}{\geq} f$, e supõe-se sem perda de generalidade que $f \overset{\phi}{\geq} g$. Daí existe $h \in \mathcal{I}_s$ tal que $f = gh$. Portanto $f(x) = g(h(x)) = g(x)$. Como s é injetora, g também é, assim $h(x) = x$. Mas se $h \overset{\phi}{\geq} s$, então $x \overset{s}{\geq} h(x) \overset{\phi}{\geq} s(x)$, absurdo pois $\mathcal{O}(x)$ é órbita não cíclica. Então $h = \mathrm{id}_S$, mostrando que $f = g$. □

Veja que a principal diferença entre a proposição anterior e o teorema da identificação é que, no caso de $s : S \longrightarrow S$ ser injetora, não há a necessidade de assumir S como já uma órbita, sendo possível tomar qualquer órbita não-cíclica contida em S.

Teorema 3.17. *Se $\mathcal{O} \subset S$ é uma órbita cíclica, então $\mathcal{I}_{s|_{\mathcal{O}}}$ é também órbita cíclica. Adicionalmente, $\mathcal{I}_{s|_{\mathcal{O}}}$ forma um grupo abeliano sob composição de funções.*

Demonstração. Dado $x \in \mathcal{O}$, como é órbita cíclica, existe $z \in \mathcal{O}$ tal que $s(z) = x$, e existe $f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = z$. Assim, tem-se que $sf(x) = x$. Prova-se que $sf = \mathrm{id}_S$ quando restrita aos elementos de $\mathcal{O}$. De fato, se $y \in \mathcal{O}$, toma-se $g \in \mathcal{I}_s$ tal que $g(x) = y$. Assim, $sf(y) = sfg(x) = gsf(x) = g(x) = y$, pois todos os elementos de $\mathcal{I}_s$ comutam entre si.

Para deixar mais claro que $\mathcal{I}_{s|_\mathcal{O}}$ é órbita cíclica, basta observar que, com as funções restritas a $\mathcal{O}$, mostrou-se que $\mathrm{id}_S \overset{\phi}{\geq} s = \phi(\mathrm{id}_S)$, com $\phi(f) = \mathrm{id}_S$, de modo que $\mathrm{id}_S \in \mathcal{O}(\phi, s)$.

E para mostrar que todo elemento de $\mathcal{I}_{s|_\mathcal{O}}$ tem inverso, faz-se a prova mostrando que o subconjunto dos elementos de $\mathcal{I}_s$ com inverso contém id_S e s, e é invariante (fechado sob ϕ).

De fato, $(\mathrm{id}_S)(\mathrm{id}_S) = \mathrm{id}_S$, sendo seu próprio inverso, e, supondo $f \in \mathcal{I}_{s|_\mathcal{O}}$ com inverso, ou seja, existindo $g \in \mathcal{I}_{s|_\mathcal{O}}$ com $fg = \mathrm{id}_S$, basta provar que $\phi(f) = sf$ tem inverso. Mas de lema anterior e como $\mathcal{I}_s$ é cíclico, existe $h \in \mathcal{I}_s$ tal que $\phi(h) = g$. Daí, $(sf)h = f(sh) = f(\phi(h)) = fg = \mathrm{id}_S$, mostrando $sf = \phi(f)$ ter inverso. Como tal conjunto das funções de $\mathcal{I}_{s|_\mathcal{O}}$ com inverso é fechado sobre ϕ e contém id_S, deve conter e ser contido pelo próprio $\mathcal{I}_{s|_\mathcal{O}}$, mostrando serem iguais. □

Teorema 3.18. *$\mathcal{O}(x)$ é órbita cíclica $\iff$ $\mathcal{I}_{s|_{\mathcal{O}(x)}}$ é órbita cíclica.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) foi demonstrado no teorema anterior. Suponha $\mathrm{id}_S \overset{\phi}{\geq} s$, de modo que pelo corolário 3.13 tem-se que $x \overset{\mathrm{s}}{\geq} s(x)$, mostrando $\mathcal{O}(x)$ ser cíclica. □

Corolário 3.19. *Se $\mathcal{O} \subset S$ é uma órbita cíclica, então $s|_\mathcal{O}$ é injetora.*

Demonstração. Suponha $a, b \in \mathcal{O}$ tais que $s(a) = s(b)$. Mas então existe $f \in \mathcal{I}_s$ tal que $sf = \mathrm{id}_S$ restrita a $\mathcal{O}$, como visto no teorema 3.17. Então $fs(a) = fs(b) \Rightarrow sf(a) = sf(b) \Rightarrow a = b$. □

Utilizando as ferramentas desenvolvidas nessa seção, pode-se fazer uma descrição mais forte da estrutura das órbitas não-cíclicas, traçando um paralelo direto com o princípio da boa-ordenação números naturais. Tal situação contribuir para mostrar a aplicabilidade da teoria desenvolvida, nesse caso para descrever as estruturas criadas com correlações evidentes à abordagem usual dos números naturais, algo explorando a fundo na próxima seção.

Lema 3.20. *Suponha $s : S \to S$ injetora, e $\mathcal{O}(x) \subset S$ uma órbita não-cíclica. Então, se $T \subset \mathcal{O}(x)$ é conjunto invariante, $s(T) \underset{\neq}{\subset} T$.*

Demonstração. Prova-se que $s(T) \neq T$. Suponha por contradição que $s(T) = T$; Assim, para todo $z \in T$, existe $y \in T$ tal que $s(y) = z$. Demonstra-se que, fixado $z \in T$, $\forall f \in \mathcal{I}_s$ existe $y \in T$ tal que $f(y) = z$. De fato, para id_S, $z = \mathrm{id}_S(z)$. Supondo $f(y) = z$, como $z \in T$, existe y' tal que $y' = s(y)$; Daí, $sf(y') = z$, mostrando tal conjunto de funções com essa propriedade ser invariante e conter id_S, e como subconjunto de $\mathcal{I}_s$, deve ser o próprio $\mathcal{I}_s$.

Mas sabe-se que $z \overset{\mathrm{s}}{\geq} x$, então existe $f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(x) = z$. Mas como demonstrado, também existe $y \in T$ tal que $sf(y) = z$, portanto $f(x) = sf(y)$. Como s é injetora, f também é, então $f(x) = sf(y) = fs(y) \Rightarrow x = s(y)$. Mas $y \overset{s}{\geq} x$ pois $y \in T$, daí $s(y) = x \overset{s}{\geq} s(x)$, contradição. $\square$

Teorema 3.21. *Suponha $s : S \to S$ injetora, e seja $\mathcal{O}(x) \subset S$ uma órbita não cíclica. Se $T \subset \mathcal{O}(x)$, então existe $z \in T$ tal que $T \subset \mathcal{O}(z)$. Ou seja, T tem um elemento mínimo.*

Demonstração. Seja $U = \bigcup_{t \in T} \mathcal{O}(t)$. Observe que $T \subset U$. Considere agora o conjunto $U \setminus s(U)$, e observe que

$$s(U) = s(\bigcup_{t \in T} \mathcal{O}(t)) = \bigcup_{t \in T} s(\mathcal{O}(t)) = \bigcup_{t \in T} \mathcal{O}(s(t)).$$

Vê-se que U é conjunto invariante, portanto pelo lema anterior $U \setminus s(U)$ é não-vazio.

Suponha $a, b \in U \setminus s(U)$. Como $\mathcal{O}(x)$ é cadeia, quaisquer dois elementos de $\mathcal{O}(x)$ são comparáveis, portanto $a \overset{s}{\geq} b$ ou $b \overset{s}{\geq} a$. Sem perda de generalidade, $a \overset{s}{\geq} b$, portanto $a \in \mathcal{O}(b)$. Mas como $a \notin s(U), a \notin s(\mathcal{O}(b))$, e como provado anteriormente, então $a = b$. Assim, o conjunto $U \setminus s(U)$ consiste de um único elemento k.

Para todo elemento $l \in T$, $k \overset{s}{\geq} l$ ou $l \overset{s}{\geq} k$. Mas se $k \overset{s}{\geq} l$, tem-se $k = l$, como visto, e então também $l \overset{s}{\geq} k$. Daí $l \overset{s}{\geq} k$ $\forall l \in T$, de modo que $T \subset \mathcal{O}(k)$, demonstrando o teorema. $\square$

4 Órbitas, Modelos de Peano e Operações

4.1 Os Axiomas de Peano na Linguagem de Órbitas

Os axiomas de Peano são uma das formulações mais conhecidas para estabelecer o números naturais axiomaticamente. A presente teoria desenvolvida leva muito em consideração a intuição dada exatamente por esta construção.

Os axiomas, em sua formulação moderna, se baseiam na existência de um conjunto N, um elemento 0 distinguido de N e uma função $s : N \to N$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para todo $m, n \in N$, $m = n \iff s(m) = s(n)$;
2. Para todo $n \in N$, $s(n) \neq 0$;
3. Se $K \subset N$ é tal que $0 \in K$ e, para todo $n \in N$, $n \in K \Rightarrow s(n) \in K$, então $K = N$.

Percebe-se que, com a linguagem desenvolvida até agora, pode-se interpretar o conjunto N e a função s na ótica de órbitas e conjuntos invariantes, de modo a ter os seguintes 3 axiomas equivalentes aos anteriores para caracterizar as propriedades de $N, 0$ e s:

1. $s : N \to N$ é injetora;
2. $0 \notin s(N)$;
3. $N = \mathcal{O}(0)$.

O axioma (3) acima diretamente implica na formulação equivalente para o axioma (2) de que $0 \overset{s}{\not\geq} s(0)$, equivalente a dizer que $N = \mathcal{O}(0)$ é órbita não-cíclica. Com as proposições e teoremas vistos anteriormente, pode-se descrever bem como o conjunto N e a função s se comportariam. Notadamente:

- A relação $\overset{s}{\geq}$ é uma ordem total em N;
- Para todo $n \in N$, existe única função $f_n \in \mathcal{I}_s$ tal que $f_n(0) = n$;
- Para todo $T \subset N$, T tem elemento mínimo por $\overset{s}{\geq}$;

além de outras proposições decorrentes do que já foi visto, correspondendo às intuições iniciais acerca dos números naturais.

Em [1], Leon Henkin ainda propõe o exercício de demonstrar que, num conjunto N com função $s : N \to N$ valendo a propriedade (3), pelo menos uma das propriedades (1) ou (2) deve valer. De fato, isto é exatamente o que é provado no corolário 3.19, em que se a órbita é cíclica, então pelo menos s deve ser injetora.

Seguindo a notação de Henkin, refere-se à tripla ordenada $(N, 0, s)$ de um conjunto, um elemento distinguido dele e uma função satisfazendo os 3 axiomas evidenciados como um *modelo de peano*. Ela captura e sintetiza a ideia vista de órbitas não-cíclicas sob funções injetoras como correlações diretas dos naturais como estipulados nos axiomas de Peano.

4.2 A Classificação das Órbitas

A partir das discussões e dos resultados anteriores, pode-se realmente fazer a classificação completa das órbitas induzidas por s em S. Embora a classificação seja feita a partir da hipótese de o próprio S ser a órbita analisada, vê-se que essa condição não enfraquece a análise. Isto pois a análise da órbita é sempre feita em nível local, tomando s atuando especificamente na órbita, e bastando considerar a restrição de s à órbita.

Teorema 4.1 **(Classificação das órbitas).** *Seja $S = \mathcal{O}(x)$ e $s : S \to S$. Então há apenas três situações distintas possíveis:*

1. *$\mathcal{O}(x)$ **é cíclica:** nesse caso, s é bijetora e valem os teoremas já mencionados sobre órbitas cíclicas;*

2. *$\mathcal{O}(x)$ **é pré-cíclica:** nesse caso, s é nem injetora nem sobrejetora, e existe $y \neq x \in \mathcal{O}(x)$ tal que y é o único ponto em que s não é injetora (ou seja, é o único elemento de $\mathcal{O}(x)$ tal que existem $a \neq b \in \mathcal{O}(x)$ com $s(a) = s(b) = y$), para todo z com $y \overset{s}{\geq} z \overset{s}{\geq} x$, $z \neq y$, $\mathcal{O}(z)$ é não-cíclica, e $\mathcal{O}(y)$ é cíclica;*

3. *$(\mathcal{O}(x), x, s)$ **é um modelo de Peano:** nesse caso, s é injetora e não sobrejetora, e valem as propriedades já mencionadas sobre órbitas não-cíclicas quando s é injetora.*

Demonstração. Veja que há dois casos iniciais: $x \in s(\mathcal{O}(x))$ ou $x \notin s(\mathcal{O}(x))$, ou seja, $x \overset{s}{\geq} s(x)$ ou $x \overset{s}{\ngeq} s(x)$ (ou equivalentemente, se s é sobrejetora ou não). Caso $x \overset{s}{\geq} s(x)$, $\mathcal{O}(x)$ será cíclica e valem as propriedades já mencionadas, com o corolário 3.19 indicando s ser uma bijeção.

Caso $x \overset{s}{\ngeq} s(x)$, há os dois casos de s ser ou não injetora: caso seja, será modelo de Peano como descrito anteriormente. Se não for, existem $a, b \in \mathcal{O}(x)$ tais que $a \neq b$ e $s(a) = s(b)$. Seja $y = s(a) = s(b)$; assim, $y \overset{s}{\geq} s(a) \overset{s}{\geq} a$ e $y \overset{s}{\geq} s(b) \overset{s}{\geq} b$.

Pelo fato de $\mathcal{O}(x)$ ser cadeia, tem-se sem perda de generalidade que $b \overset{s}{\geq} a$. Conclui-se então que $a \overset{s}{\ngeq} b$, pois caso contrário a e b formariam uma órbita cíclica, onde s seria injetora e portanto $s(a) = s(b) \Rightarrow a = b$, absurdo.

Daí, mostra-se que para todo $t \in \mathcal{O}(x)$ com $a \overset{s}{\geq} t$, tem-se $t \overset{s}{\ngeq} s(t)$, pois senão $\mathcal{O}(t)$ seria cíclica com $a, b \in \mathcal{O}(t)$, novamente gerando contradição ao ter $\mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b)$ cíclica. Conclui-se também que $a \overset{s}{\ngeq} y = s(a)$ dessa maneira.

Como $b \overset{s}{\geq} a$, existe $f \in \mathcal{I}_s$ diferente de id_S tal que $f(a) = b$. Assim, $sf(a) = s(b) \Rightarrow fs(a) = y \Rightarrow f(y) = y$. Como $f \neq \mathrm{id}_s$, tem-se que $f \overset{\phi}{\geq} s$, assim $y = f(y) \overset{s}{\geq} s(y)$, de modo que realmente $\mathcal{O}(y)$ é cíclica e s é injetora nela. Daí, o único ponto de "não-injetividade"é realmente o y.

□

Percebe-se da demonstração que a classificação de uma órbita depende inteiramente da **injetividade ou sobrejetividade de** s em respeito a essa órbita:

- s bijetora se e só se a órbita for cíclica;
- s injetora e não sobrejetora se e só se a órbita compor um modelo de Peano;
- s não injetora e não sobrejetora se e só se a órbita for pré-periódica.

Observe que, se $s : \mathcal{O}(x) \longrightarrow \mathcal{O}(x)$ for sobrejetora, é automaticamente bijetora também, e forma uma órbita cíclica.

Teorema 4.2 (Correspondência Órbita - Iteradas). *Dado $S = \mathcal{O}(x)$ e $s : S \longrightarrow S$, tem-se:*

1. *$\mathcal{O}(x, s)$ é cíclica $\iff$ $\mathcal{I}_s$ é cíclica;*
2. *$\mathcal{O}(x, s)$ é pré-cíclica $\iff$ $\mathcal{I}_s$ é pré-cíclica;*
3. *$(\mathcal{O}(x, s), x, s)$ é modelo de Peano $\iff$ $(\mathcal{I}_s, \mathrm{id}_S, \phi)$ é modelo de Peano.*

Ainda, $\mathcal{O}(x)$ e $\mathcal{I}_s$ estão em bijeção por

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{I}_s & \longrightarrow & \mathcal{O}(x) \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

que preserva as pré-ordens $\overset{s}{\geq}$ e $\overset{\phi}{\geq}$, e para a qual vale que

$$\begin{array}{rcl} \psi(\mathrm{id}_S) & = & x \\ \psi(\phi(f)) & = & s(f(x)). \end{array}$$

Demonstração. Veja que, como as órbitas possuem apenas essas três formas possíveis, basta demonstrar duas das equivalências acima para a terceira valer. De fato, mostrou-se previamente (1), e para (3), vê-se que s é injetora $\iff$ ϕ é injetora; para a sobrejetividade, veja que $\exists t \in \mathcal{O}(x)$ tal que $s(t) = x \iff \exists h \in \mathcal{I}_s$ tal que $\phi(h) = \mathrm{id}_S$.

De fato, se $s(t) = x$, com $k \in \mathcal{I}_s$ tal que $k(x) = t$, então $sk(x) = x$. Para todo $y \in \mathcal{O}(x)$, existe $h \in \mathcal{I}_s$ tal que $h(x) = y$, então $sk(y) = skh(x) = hsk(x) = h(x) = y$. Assim, $sk = \mathrm{id}_S = \phi(k)$. Para a volta, basta ver que se $sk = \mathrm{id}_S$, então $sk(x) = x = s(k(x))$. Assim, se s é injetora e não sobrejetora, ϕ também, configurando modelo de Peano.

A bijeção, assim como a preservação das pré-ordens, já foi demonstrada no teorema 3.15, e a propriedade destacada é verificada facilmente. □

4.3 Modelos de Peano e a Operação de Adição

O desenvolvimento da teoria de modelos de Peano e suas emanações é bem construído no artigo *On Mathematical Induction* de Leon Henkin, com destaque a certos teoremas importantes:

Teorema 4.3. *Dados modelos de Peano $(N, 0, s)$ e $(N', 0', s')$, existe um único homomorfismo $h : N \longrightarrow N'$ em relação a sua estrutura como modelo de Peano; ou seja, uma função $h : N \longrightarrow N'$ tal que*

$$h(0) = 0', \text{ e } h(sx) = s'(hx).$$

Teorema 4.4. *Quaisquer dois modelos de Peano são isomorfos canonicamente pelo homomorfismo descrito no teorema anterior.*

Leon Henkin, em seu artigo, demonstra esses e outros teoremas a partir de uma construção fundamentada por funções parciais num conjunto e os ditos modelos indutivos, que são identificados na presente teoria simplesmente como as órbitas genéricas de um elemento $x \in S$, sem restrições sobre a função $s : S \longrightarrow S$.

Um de seus intuitos era formalizar a construção de funções e operações definidas recursivamente em modelos de Peano, um desdobramento natural da presente teoria. Perceba a presença dessas estruturas destacadas nos teoremas anteriores, fornecendo uma comunicação importante entre as duas abordagens. Ainda mais, a construção do conjunto das iteradas permite uma análise com ainda mais estrutura acerca dos modelos de Peano, contribuindo com o desenvolvimento da teoria.

Ainda mais, ao invés do desenvolvimento usual das operações aritméticas por definição recursiva, é possível um desenvolvimento dessas operações em N (e, mais geralmente, em qualquer conjunto $S = \mathcal{O}(x)$ para algum distinto $x \in S$) herdado do isomorfismo natural com $\mathcal{I}_s$, o qual já se configura um monoide sob a composição de funções (no caso, as iteradas de s). Lembre, com $S = \mathcal{O}(x)$, da bijeção

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{I}_s & \longrightarrow & \mathcal{O}(x) \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

e que tal bijeção ψ é exatamente o isomorfismo canônico entre esses modelos indutivos, ou seja, satisfazendo

$$\begin{array}{rcl} \psi(\mathrm{id}_S) & = & x \\ \psi(\phi(f)) & = & s(\psi(f)). \end{array}$$

Assim, define-se a seguinte operação binária sobre $\mathcal{O}(x)$, denominada *adição*:

$$\begin{array}{rrcl} + : & \mathcal{O}(x) \times \mathcal{O}(x) & \longrightarrow & \mathcal{O}(x) \\ & (a, b) & \longmapsto & [\psi^{-1}(a) \circ \psi^{-1}(b)](x) \end{array}$$

Em que denota-se $+(a, b)$ por $a + b$. Deste modo,

$$\psi^{-1}(a + b) = \psi^{-1}(a) \circ \psi^{-1}(b).$$

Perceba que a adição como assim definida depende inteiramente da órbita que considerada. Primeiro considera-se funções restritas apenas a $\mathcal{O}(x)$, com efeito equivalente a tomar $S = \mathcal{O}(x)$ como um conjunto próprio dado. Daí, neste conjunto, a soma como definida aplica-se imediatamente apenas em $\mathcal{O}(x)$, e possivelmente não a qualquer $\mathcal{O}(y) \subset \mathcal{O}(x)$.

Vê-se prontamente que, devido a estrutura pré-existente de $\mathcal{I}_s$ como monoide, tem-se que a adição é associativa, comutativa, possui elemento neutro sendo o x e possui a seguinte propriedade para todos $a, b \in S = \mathcal{O}(x)$:

$$\begin{aligned} a + x &= a \\ a + s(b) &= s(a+b) \end{aligned}$$

Explicitamente, supondo $\psi^{-1}(b) = k$, tem-se que

$$\begin{aligned} a + s(b) &= [\psi^{-1}(a)\psi^{-1}(s(b))](x) \\ &= [\psi^{-1}(a)\psi^{-1}(s(k(x)))](x) \\ &= [\psi^{-1}(a)sk](x) \\ &= s[\psi^{-1}(a)k](x) \\ &= s[\psi^{-1}(a)\psi^{-1}(b)](x) \\ &= s(a+b) \end{aligned}$$

Ainda, distinguindo o elemento $s(x) = u$, tem-se que

$$s(a) = a + u = u + a$$

Pela unicidade da adição satisfazendo as relações recursivas no artigo de Henkin, a operação adição definida dessa maneira é a mesma operação descrita por ele em seu artigo.

Para $a \in \mathcal{O}(x)$, pode-se denotar $\psi^{-1}(a)$ por $+_a$; intuitivamente, é a função "somar a", vendo que

$$a + b = +_a(b) = +_b(a) = +_{a+b}(x)$$

já que, devido a $a = [\psi^{-1}(a)](x)$, todas essa expressões são iguais a

$$[\psi^{-1}(a)\psi^{-1}(b)](x)$$

ainda, tem-se que $+_{s(x)} = +_u = s$. Tal identificação é ainda mais fundamental que a operação binária de adição, visto que é resultante da bijeção natural de $\mathcal{O}(x)$ com $\mathcal{I}_s$, transformando elementos em operações unárias e vice-versa.

Teorema 4.5. *Dados $a, b \in \mathcal{O}(x)$, $a \overset{s}{\geq} b \iff \exists c \in \mathcal{O}(x)$ tal que $a = b + c$. Se s for injetora, então tal c é único, e será denotado por $a - b$.*

Demonstração. Veja que $a \overset{s}{\geq} b \iff \exists f \in \mathcal{I}_s$ tal que $f(b) = a$. Mas pela bijeção entre $\mathcal{O}(x)$ e $\mathcal{I}_s$, tem-se que $f = \psi^{-1}(c) = +_c$ para algum $c \in \mathcal{O}(x)$. Daí, $a = f(b) = +_c(b) = b + c$. A volta é análoga.

Para a unicidade, veja que $b + c = b + c' = a$ implica em $+_b(c) = +_b(c')$, e como s é injetora, $+_b$ também, de modo que $c = c'$. □

4.4 Modelos de Peano e Múltiplos

Com a operação de adição bem definida com respeito a uma órbita e a função restrita a ela, imagina-se a multiplicação como consequência imediata. No entanto, sua formalização inteiramente na linguagem de órbita é mais complexa e será vista à frente.

No entanto, mesmo sem a estrutura multiplicativa em modelos de Peano, pode-se definir conceitos aparentemente intrínsecos a ela apenas com a adição e as ferramentas desenvolvidas, mais especíificamente os múltiplos de elementos e uma relação análoga à divisibilidade.

Tomando $a, b \in \mathcal{O}(x) = S$, com $\psi^{-1}(a) = +_a$, pode-se construir o conjunto

$$\mathcal{M}(b, a) := \mathcal{O}(b, +_a)$$

dos elementos de $\mathcal{O}(x)$ resultados de iterações sucessivas de b por $+_a$. Percebe-se facilmente que $\mathcal{M}(b, a) \subset \mathcal{O}(x, s)$. Tal conjunto será denominado o *conjunto dos múltiplos de a (a partir de b)*, e, quando $b = x$ é evidente do contexto, será denotado simplesmente por $\mathcal{M}(a)$.

Ainda, tomando a função

$$\begin{aligned} \phi_a : \mathcal{I}_s &\longrightarrow \mathcal{I}_s \\ f &\longmapsto +_a f \end{aligned}$$

pode-se construir

$$\mathcal{I}_{+_a} := \mathcal{O}(\mathrm{id}_S, \phi_a)$$

de todas as iteradas de $+_a$. Percebe-se que $\mathcal{I}_{+_a} \subset \mathcal{I}_s$ facilmente, podendo ser visto em argumento por invariância de que, se $f \in \mathcal{I}_s$, então $+_a f \in \mathcal{I}_s$.

Proposição 4.6. *$\mathcal{I}_{+_a}$ e $\mathcal{M}(a)$ estão em bijeção por meio de $\psi|_{\mathcal{I}_{+_a}}$, obedecendo todas as propriedades de ψ já vistas.*

Demonstração. Basta provar que $\psi(\mathcal{I}_{+_a}) = \mathcal{O}(x, +_a)$. Tem-se que $\mathrm{id}_S \in \mathcal{I}_{+_a}$, portanto $x \in \psi(\mathcal{I}_{+_a})$. Suponha que $z \in \psi(\mathcal{I}_{+_a})$; quer-se mostrar que $+_a(z) = a + z \in \psi(\mathcal{I}_{+_a})$. De fato, $z \in \psi(\mathcal{I}_{+_a}) \iff z = \psi(f)$ para alguma $f \in \mathcal{I}_{+_a} \iff \psi^{-1}(z) = f$ para alguma $f \in \mathcal{I}_{+_a}$.

Daí, $+_a f = +_a \psi^{-1}(z) = \psi^{-1}(a + z) \in \mathcal{I}_{+_a}$, concluindo que $a + z \in \psi(\mathcal{I}_{+_a})$. □

A partir do conceitos de múltiplos de a a partir de x, considerando $a \in \mathcal{O}(x) = S$, tem-se como instituir um análogo à relação de divisibilidade sobre órbitas:

Dados $a, b \in \mathcal{O}(x) = S$, diz-se que *$b$ é múltiplo de a* se

$$b \in \mathcal{M}(a),$$

e denota-se essa relação por $a|_s b$.

Lema 4.7. *Para $a, b \in \mathcal{O}(x) = S$, $b \in \mathcal{M}(a) \iff \mathcal{M}(b) \subset \mathcal{M}(a)$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) é claramente verdadeiro. Para ($\Rightarrow$), perceba que $\mathcal{M}(b) \subset \mathcal{M}(a) \iff \mathcal{I}_{+_b} \subset \mathcal{I}_{+_a}$, devido à bijeção pela restrição de ψ. Mas para provar isso dado que $b \in \mathcal{M}(a)$, basta mostrar que $\mathcal{I}_{+_a}$ contém id_S (algo claro) e é invariante por $+_b$.

Mas $b \in \mathcal{M}(a) \Rightarrow +_b \in \mathcal{I}_{+_a}$, e como da mesma forma que demonstrou-se $\mathcal{I}_s$ ser um monoide, $\mathcal{I}_{+_a}$ também o é, de modo que se $f \in \mathcal{I}_{+_a}$, então $+_b f \in \mathcal{I}_{+_a}$. □

Teorema 4.8. *Para todos $a, b, c \in \mathcal{O}(x) = S$, relação $|_s$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- $a|_s a$;
- $a|_s b$ *e* $b|_s c \Rightarrow a|_s c$;
- *Se* $(\mathcal{O}(x), x, s)$ *é modelo de Peano, então* $a|_s b$ *e* $b|_s a \Rightarrow a = b$;
- *Se* $a|_s b$ *e* $a|_s c$, *então, para todos* $u \in \mathcal{M}(b)$ *e* $v \in \mathcal{M}(c)$, $a|_s u + v$.

Demonstração. A primeira afirmação é clara de $a \in \mathcal{M}(a)$. Para a transitividade, usa-se a transitivade da inclusão de conjuntos dada pelo lema anterior. Para a antissimetria quando é modelo de Peano, a afirmação requer o uso do teorema 3.21, a respeito de, com $S = \mathcal{O}(x)$, $\overset{s}{\geq}$ ser uma boa ordem.

Demonstra que o elemento mínimo por $\overset{s}{\geq}$ de $\mathcal{M}(a) \setminus \{x\}$ é a; De fato, $\mathcal{M}(a) \setminus \{x\} = +_a(\mathcal{O}(x, +_a)) = \mathcal{O}(a, +_a)$, que tem como elemento mínimo a. Daí, com $\mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(b)$ implicado pela antissimetria, os elementos mínimos devem ser iguais, portanto $a = b$.

Para a última afirmação, basta ver que, se $u, v \in \mathcal{M}(a)$, então $u + v \in \mathcal{M}(a)$; Veja antes de tudo que $z \in \mathcal{M}(a) \iff +_z \in \mathcal{I}_{+_a}$, pela bijeção vista. Como $+_u, +_v \in \mathcal{I}_{+_a}$, e $+_{u+v} = +_u \circ +_v$, pelo fato de $\mathcal{I}_{+_a}$ ser monoide sob composição tem-se a conclusão desejada. □

4.5 Modelos de Peano e seus Homomorfismos em Órbitas

O próximo passo natural seria uma definição de o que seria a multiplicação de elementos traduzida na linguagem de órbitas. Para tal, é necessário trabalhar em modelos de Peano, e realizar uma construção de resultado análogo ao teorema 4.3 demonstrado por Henkin utilizando funções parciais.

Sejam $A = \mathcal{O}(0_1, s_1)$ e $B = \mathcal{O}(0_2, s_2)$ conjuntos dados, cada qual uma órbita de um elemento distinguido do próprio conjunto e de tal forma que $(A, 0_1, s_1)$ é modelo de Peano.

Sobre o conjunto $A \times B = \mathcal{O}(0_1, s_1) \times \mathcal{O}(0_2, s_2)$ define-se a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} s: & A \times B & \longrightarrow & A \times B \\ & (a, b) & \longmapsto & (s_1(a), s_2(b)) \end{array}$$

No conjunto $A \times B$, munido de uma função s, toma-se a órbita

$$H = \mathcal{O}((0_1, 0_2), s)$$

Verifica-se que tal órbita será um conjunto de pares ordenados de $A \times B$. Demonstra-se que tal conjunto é uma função $h : \mathcal{O}(0_1, s_1) \longrightarrow \mathcal{O}(0_2, s_2)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} h(0_1) & = & 0_2 \\ h(s_1(a)) & = & s_2(h(a)) \end{array}$$

para todo $a \in A$; ou seja, h é um homomorfismo em respeito à estrutura de modelo de Peano, e ainda um homomorfismo sobrejetor.

Deve-se interpretar $H = \mathcal{O}((0_1, 0_2), s)$ como uma função no sentido da teoria de conjuntos, em que uma função $f : A \longrightarrow B$ é um subconjunto de f de $A \times B$ tal que para todo $a \in A$ existe algum $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, e se $(a, b), (a, c) \in f$, então $b = c$. A notação usual para $(a, b) \in f$ é $f(a) = b$. Nesse caso específico, rigorosamente teria-se que $h = H$. Observe que identificou-se s com sua restrição a H, de modo a considerar seu comportamento apenas nesse conjunto.

Demonstra-se que, para todo $a \in A$, existe um $b \in B$ tal que $(a, b) \in H$; de fato, 0_1 tem tal propriedade, e se $a \in A$ tem, com $(a, b) \in H$, então $s_1(a)$ também, com $(s_1(a), s_2(b)) \in H$.

Resta demonstrar que se $(a, b), (a, c) \in H$, então $b = c$. Considera-se o subconjunto A' de A dos elementos de A com essa propriedade. Tem-se que $0_1 \in A'$; veja que se $(0_1, b) \in H$, então $(0_1, b) = (0_1, 0_2)$ ou $(0_1, b) \in s(H)$, pois $H = \{(0_1, 0_2)\} \cup s(H)$. Mas veja que o segundo caso é impossível, pois como $(A, 0_1, s_1)$ é modelo de Peano, não há $c \in A$ tal que $s_1(c) = 0_1$, sendo impossível que $(0_1, b) = s(c, d) = (s_1(c), s_2(d))$.

Agora suponha que $a \in A'$, e que $(s_1(a), b)$ e $(s_1(a), c) \in H$. Tem-se novamente que ou $(s_1(a), b) \in s(H)$ ou é igual a $(0_1, 0_2)$. Com $s_1(a) \neq 0_1$, tem-se que $(s_1(a), b) \in s(H)$. Assim, existe $(l, m) \in H$ tal que $s(l, m) = (s_1(a), b)$, portanto $s_1(l) = s_1(a)$ e $s_2(m) = b$.

Desse modo, como s_1 é injetora, $a = l$, e $s_2(m) = b$. Analogamente, também existe $(a, n) \in H$ tal que $s_2(n) = c$. Mas pelo fato de $a \in A'$, conclui-se que $m = n$ e, portanto, $b = c$. Assim, $s_1(a) \in A' \Rightarrow A' = A$.

Asim, conclui-se realmente que H representa uma função de A em B, facilmente vendo que $h(0_1) = 0_2$ e $h(s_1(a)) = s_2(h(a))$.

Teorema 4.9. *Dado um modelo de Peano $(A, 0_1, s_1)$ e um conjunto $B = \mathcal{O}(0_2, s_2)$ que é órbita de um de seus elementos por s_2, existe um único homomorfismo $h : A \longrightarrow B$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} h(0_1) &= 0_2 \\ h(s_1(a)) &= s_2(h(a)) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Ainda mais, esse homomorfismo é sobrejetor.

Demonstração. Falta demonstrar tal homomorfismo ser sobrejetor e único. Para a sobrejetividade, considere o conjunto $h(A) \subset B$. Tem-se que $0_2 \in h(A)$, e se $b \in H(A)$, com $h(a) = b$, tem-se que $s_2(b) \in h(A)$, pois $s_2(b) = h(s_1(a))$. Daí, $H(A) = B$ por ser órbita.

Para a unicidade, supondo h, h' satisfazendo o teorema, quer-se que $h = h'$, ou seja, $h(a) = h'(a)\ \forall a \in A$. Repete-se o argumento indutivo:

Seja A' subconjunto de A dos elementos $a \in A$ tais que $h(a) = h'(a)$. Tem-se que $0_1 \in A'$ pois $h(0_1) = 0_2 = h'(0_1)$, e se $a \in A'$, então $h(a) = h'(a) \Rightarrow h(s_1(a)) = s_2(h(a)) = s_2(h'(a)) = h'(s_1(a))$, mostrando que $s_1(a) \in A' \Rightarrow A' = A$, e $h = h'$. □

A principal consequência do teorema acima ocorre quando $(B, 0_2, s_2)$ também é um modelo de Peano. De fato, a simetria na definição de $H = \mathcal{O}((0_1, 0_2), s)$ garante que é uma função bijetora/inversível, assim será um isomorfismo.

Teorema 4.10 (Isomorfismos entre Modelos de Peano). *Sejam $(A, 0_1, s_1)$ e $(B, 0_2, s_2)$ modelos de Peano. Então existe um único homomorfismo $h : A \longrightarrow B$, ou seja, uma função*

$h : A \longrightarrow B$ tal que

$$\begin{aligned} h(0_1) &= 0_2 \\ h(s_1(a)) &= s_2(h(a)) \end{aligned}$$

Ainda mais, tal homomorfismo é um isomorfismo.

Um comentário interesante acerca desse isomorfismo h entre dois modelos de Peano é que, exatamente por preservar as funções sobre as quais se tem invariância, preserva também as ordens $\overset{s_1}{\geq}$ e $\overset{s_2}{\geq}$.

4.6 Modelos de Peano e a Operação de Multiplicação

Além de descrever a totalidade dos modelos de Peano como isomorfos a uma estrutura única, as construções anteriores tem utilidade em traçar ferramentas para a construção de operações definidas indutivamente mais complexas. Percebe-se antes que $\mathcal{I}_{+_0} = \{\mathrm{id}_S\}$, sendo um caso de exceção para a propriedade de que, para todo $a \in S, a \neq 0$, $\mathcal{I}_{+_a}$ é modelo de Peano.

Tomando $(S, 0, s)$ um modelo de Peano, tem-se o conjunto das iteradas $\mathcal{I}_s$ em relação com o conjunto $\mathcal{I}_{+_a}$ por meio do homomorfismo canônico de modelos de Peano:

$$\begin{aligned} h_a : \mathcal{I}_s &\longrightarrow \mathcal{I}_{+_a} \\ f &\longmapsto f_a \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_S)_a &= \mathrm{id}_S \\ (sf)_a &= +_a f_a \end{aligned}$$

A partir desse homomorfismo para cada $a \in S = \mathcal{O}(0)$, pode-se considerar o caso de $f = +_b$ para algum $b \in S$. Daí, define-se então a multiplicação em $S = \mathcal{O}(0)$ como

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{O}(0) \times \mathcal{O}(0) &\longrightarrow \mathcal{O}(0) \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b = \psi((+_b)_a) \end{aligned}$$

também podendo denotar $a \cdot b$ simplesmente por ab, e tomando $0 \cdot b = 0$ para todo $b \in S$. Perceba que a definição em si não é simétrica; é necessário demonstrar as propriedades usuais da multiplicação.

Proposição 4.11. *A operação $\cdot$ tem as seguintes propriedades:*

- *é associativa;*
- *é comutativa;*
- *tem elemento neutro sendo o $s(0)$;*
- *é distributiva sobre a adição.*

Para demonstrar tais propriedades, toma-se a relação fundamental que a multiplicação obedece:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 \\ a \cdot s(b) &= a \cdot b + a \end{aligned}$$

De fato, $a \cdot 0 = \psi((+_0)_a) = \psi(\mathrm{id}_a) = \psi(\mathrm{id}) = 0$, e também
$a \cdot s(b) = \psi((+_{s(b)})_a) = \psi((s+_b)_a) = \psi(+_a(+_b)_a) = a + \psi((+_b)_a) = a \cdot b + a.$

As propriedades são demonstradas por meio de argumento indutivo, considerando o conjunto $S' \subset S$ de elementos que as satisfazem. A partir daí, as demonstrações seguem as linhas já vistas na descrição usual dos axiomas de Peano, utilizando-se da propriedade destacada da multiplicação.

A única objeção possível é que em alguns desses argumentos tem-se a indução não sobre um elemento de S, mas também sobre dois, ou sobre a soma de dois elementos; tais propriedades derivam de conclusões do princípio forte de indução para os axiomas de Peano, a partir do fraco, e não compete à presente exposição.

De fato, percebe-se que pela descrição de um modelo de Peano ser idêntica aos axiomas de Peano para os número naturais, e a soma e multiplicação como definidas terem as propriedades indutivas que as fundamentam nesses axiomas, as conclusões dos modelos quanto a essas operações devem ser as mesmas. Desse modo, reforça-se a ideia da teoria desenvolvida ser capaz de fundamentar a aritmética e as primeira noções dos números naturais (como vistos nos axiomas de Peano).

Um último comentário de relevância é sobre a construção dos número naturais em ZFC; para tal, o modelo assume o Axioma do Infinito, garantindo a existência de um conjunto não vazio X para o qual se $x \in X$, então $x \cup \{x\} \in X$. Tal construção possibilita a construção aritmética em ZFC, assim abrindo caminho para diversas outras construções de cunho fundamentalmente aritmético.

A presente exposição mostra que, para obter resultados aritméticos similares, pode-se adotar um axioma assumindo a existência de um conjunto S e uma função $s : S \longrightarrow S$ que é injetora mas não sobrejetora, e considerando $\mathcal{O}(x)$ para $x \in S \setminus s(S)$. Tal construção corresponde à intuição natural tida de um conjunto infinito, aquele que está em bijeção com um subconjunto próprio de si.

Daí, teria-se realmente que $(\mathcal{O}(x), x, s)$ seria um modelo de Peano, sendo possível todas as construções descritas sobre ele. Ainda, devido aos isomorfismos entre os modelos de Peano, poderia-se identificar tal estrutura existente como **um** conjunto dos naturais, com qualquer outro isomorfo a ele.

Referências

[1] Henkin, L. (1960). *On Mathematical Induction.* The American Mathematical Monthly, 67(4), 323-338.

[2] Hrbacek, Karel. & Jech, Thomas J. (1984). *Introduction to set theory.* New York : M. Dekker.