Iteração de Funções

Eduardo Sodré

August 2019

1 Uma definição formal de iteração

Seja $S = \mathcal{O}(i, s)$ uma órbita, e considere $\mathcal{I}_s$ o conjunto das iteradas de S. Vimos que há um isomorfismo canônico entre as iteradas de s e os elementos de S por meio da avaliação em i:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{av}_i : \mathcal{I}_s & \longrightarrow & \mathcal{O}(i, s) \\ f & \longmapsto & f(i) \end{array}$$

de modo que $\mathrm{av}_i(\mathrm{id}_S) = i$ e $\mathrm{av}_i(\hat{s}(f)) = s(\mathrm{av}_i(f))$. Lembra-se que $\hat{s} : S^S \longrightarrow S^S$ é tal que $\hat{s}(f) = sf$. Não é difícil verificar também que tal isomorfismo é o único a ter essas propreidades.

Como é isomorfismo, há uma função inversa bem definida:

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{O}(i, s) & \longrightarrow & \mathcal{I}_s \\ n & \longmapsto & s^n \end{array}$$

em que, previamente, definiu-se s^n como $+_n$, e deduz-se $s^i = \mathrm{id}_S$ e $s \circ s^n = s^{s(n)}$.

Deseja-se agora utilizar a aparente universalidade do comportamento dos modelos de Peano para induzir em conjuntos arbitrários ideias de iterações. De fato, como todos os modelos de Peano são isomorfos sob a estrutura de iteradas e iterações, e capturam tais ideias fundamentalmente, projeta-se suas estruturas na combinação de um conjunto arbitrário X dado e uma função $f : X \longrightarrow X$.

Seja então (N, i, s) um modelo de Peano, X um conjunto arbitrário não-vazio, e $x \in X$ um elemento distinto de X.

Teorema 1.1. *Existe uma única função $\varphi : N \longrightarrow X$ tal que $\varphi(i) = x$ e de modo que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccccc} & N & \xrightarrow{s} & N & \\ \varphi & \downarrow & & \downarrow & \varphi \\ & X & \xrightarrow{f} & X & \end{array}$$

ou seja, tal que $\varphi(i) = x$ e $\varphi \circ s = f \circ \varphi$.

Demonstração. Primeiro demonstremos existir tal função. Considere o conjunto $N \times X$ dos pares ordenados de elementos de N e de X, a função

$$\begin{array}{rccc} s \times f: & N \times X & \longrightarrow & N \times X \\ & (m, y) & \longmapsto & (s(m), f(y)) \end{array}$$

e a órbita $\varphi = \mathcal{O}((i,x), s \times f)$. Mostra-se que φ é uma função de N em X, no sentido de conjunto de pares ordenados de N e X tal que, para todo $m \in N$, existe um único $y \in X$ tal que $(m, y) \in X$.

Seja $N' = \{m \in N \mid \exists! y \in X : (m, y) \in \varphi\} \subset N$ o subconjunto de N para cujos elementos φ atua como função, e mostremos que $N' = N$ ao ser indutivo e $i \in N'$.

De fato, $(i, x) \in \varphi$, e supondo $(i, y) \in \varphi$, quer-se achar que $x = y$. De fato, como $\mathcal{O}((i,x), s \times f) = \{(i, x)\} \cup (s \times f)[\mathcal{O}((i,x), s \times f)]$, deve-se ter que $(i, y) = (i, x)$ ou que (i, y) está na imagem de $s \times f$ na órbita. Nesse último caso, teria-se que um $(m, z) \in \varphi$ tal que $(i, y) = (s \times f)((m, z)) = (s(m), f(z))$, o que não pode ocorrer pois i não está na imagem de s. Daí, $x = y$, e portanto $i \in N'$.

Suponha agora que $m \in N'$, ou seja, existe um único $y \in X$ tal que $(m, y) \in \varphi$. Então $(s(m), f(y)) \in \varphi$. Basta mostrar que se $(s(m), z) \in \varphi$, então $z = f(y)$. Como todos os elementos de uma órbita são comparáveis, deve-se ter que $(s(m), f(y)) \in \mathcal{O}((s(m), z), s \times f)$ ou que $(s(m), z) \in \mathcal{O}((s(m), f(y)), s \times f)$. Sem muita perda de generalidade, repete-se o argumento para i feito acima e demonstra-se facilmente que $z = f(y)$.

Assim, tem-se que $s(m) \in N'$, de modo que N' é um conjunto indutivo contendo i, portanto $N' = N$ e conclui-se rapidamente que $\hat{s}$ é uma função para a qual o diagrama comuta e $\varphi(i) = x$.

Mostremos então que φ é a única função satisfazendo tais propriedades: se $\psi : N \longrightarrow X$ é uma outra tal função, considere o conjunto $N'' = \{m \in N \mid \varphi(m) = \psi(m)\} \subset N$, e mostremos que $N'' = N$, de modo que $\psi = \varphi$. Mas claramente $\psi(i) = x = \varphi(i)$, e se $\varphi(m) = \psi(m)$, então $\varphi(s(m)) = f(\varphi(m)) = f(\psi(m)) = \psi(s(m))$, concluindo que $N'' = N$. $\square$

De fato, mostrou-se então que existe uma função

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & X^X \times X & \longrightarrow & X^N \\ & (f, x) & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

com $\Delta(f, x)$ a (única) função de N em X tal que $\Delta(f, x)(i) = x$ e $\Delta(f, x) \circ s = f \circ \Delta(f, x)$. Isso ainda mostra que Δ é única como função de $X^X \times X$ em X^N que associa a cada $f \in X^X$ e cada $x \in X$ a única função $\Delta(f, x)$ de N em X satisfazendo as propriedades já ditas. Afinal, se houvesse outra Δ', então $\Delta'(f, x) = \Delta(f, x)$ para todos f, x, em função da unicidade de $\varphi = \Delta(f.x) = \Delta'(f, x)$ para todos $f \in X^X$, $x \in X$. Portanto tem-se $\Delta' = \Delta$.

Abstraindo o contexto, supõe-se uma função $g : A \times B \longrightarrow C$. Então determina-se unicamente uma função $h : A \longrightarrow C^B$ tal que $h(a)(b) = g(a, b)$, e vice-versa. Assim, há uma correspondência biunívoca entre $C^{A \times B}$ e $(C^B)^A$.

Isto pode ser visto no subconjunto $h \subset A \times C^B$ dos pares ordenados (a, f) tais que $f(b) = g(a, b)$ para todo $b \in B$. De fato, h será função, pois para todo $a \in A$, considera-se a função $f_a : B \longrightarrow C$ tal que $f_a(b) = g(a, b)$ (explicitamente, $(b, c) \in f_a \iff c = g(a, b)$, configurando função), de modo que $(a, f_a) \in h$, e se $(a, u), (a, v) \in h$, então $u(b) = g(a, b) = v(b)$ para todo $b \in B$, daí $u = v$. A unicidade de h é vista facilmente de que, supondo outra h', tem-se que para todo $a \in A$ e $b \in B$, $h(a)(b) = g(a, b) = h'(a)(b)$, daí $h(a) = h'(a)$ para todo $a \in A$, e por fim $h = h'$.

A volta é vista também em argumentos similares: supondo $h : A \longrightarrow C^B$, toma-se $g \subset A \times B \longrightarrow C$ tal que $((a, b), c) \in g \iff h(a)(b) = c$. Que g é função é visto de que, para todo par $(a, b) \in A \times B$, $((a, b), h(a)(b)) \in g$, e se g' também satisfaz as condições, tem-se $g(a, b) = h(a)(b) = g'(a, b)$ para todo par $(a, b) \in A \times B$, daí $g = g'$.

De posse dessas novas ferramentas, toma-se $\Delta : X^X \times X \longrightarrow X^N$, em que $\Delta(f, x)$ é a única função de N em X tal que $\Delta(f, x)(i) = x$ e $\Delta(f, x) \circ s = f \circ \Delta(f, x)$; Daí tem-se

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & X^X \times X \times N & \longrightarrow & X \\ & (f, x, n) & \longmapsto & \Delta(f, x)(n) \end{array}$$

em que $\Gamma(f, x, i) = x$, e $\Gamma(f, x, s(m)) = f(\Gamma(f, x, m))$. Ainda, Γ é única satisfazendo tais propriedades, devido ao fato de sua correspondência biunívoca com Δ e Δ ser única. Similarmente, tem-se

$$\begin{array}{rccc} \Gamma^* : & N \times X^X \times X & \longrightarrow & X \\ & (n, f, x) & \longmapsto & \Delta(f, x)(n) \end{array}$$

igualmente única e satisfazendo propriedades análogas, e daí temos então

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & N \times X^X & \longrightarrow & X^X \\ & (n, f) & \longmapsto & f^n \end{array}$$

em que Λ é única com $\Lambda(n, f)(x) = f^n(x) = \Gamma(f, x, n)$, implicando em $f^i = \mathrm{id}_X$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$. Assim, Λ é a única função de $N \times X^X$ em X^X tal que $\Lambda(i, f) = \mathrm{id}_X$ e $\Lambda(s(n), f) = f \circ \Lambda(n, f)$.

Há algumas maneiras de ver isso: a mais explícita, desconsiderando as unicidades já vistas de Γ e Δ, é assumir outra Δ' e tomar $N' = \{n \in N \mid \Delta'(n, f) = \Delta(n, f)\ \forall f \in X^X\} \subset N$ e ver que $N' = N$, em argumentos já vistos.

Finalmente, ao repetir o processo anterior, obtêm-se a função

$$\begin{array}{rccc} \wedge : & N & \longrightarrow & (X^X)^{(X^X)} \\ & n & \longmapsto & \wedge(n) \end{array}$$

em que $\wedge(n)(f) = f^n$, e $\wedge(n)(f)(x) = \Gamma^*(n, f, x) = \Delta(f, x)(n)$.

A unicidade de $\wedge$ com as propriedades de que $\wedge(i)(f) = \mathrm{id}_X$ e $\wedge(s(n))(f) = f \circ \wedge(n)(f)$ vem novamente das unicidades das funções anteriores, mas novamente pode ser demosntrada independentemente: com $\wedge'$ outra tal função, considera-se $N' = \{n \in N \mid\ \wedge' (n) = \wedge(n)\}$, de tal forma que o resultado de $\wedge' = \wedge$ segue naturalmente.

Efetivamente, conlui-se que todo modelo de Peano age globalmente em todas as funções cujos domínios são também os contradomínios, com essa ação sendo feita de maneira única, formalizando a ideia de composição repetidas vezes pela mesma função. A situação clara é a compatibilidade entre s^n como definida no isomorfismo inicial entre $\mathcal{I}_s$ e N e como definida a partir de Λ.

Ainda mais, como entre quaisquer dois modelos de Peano há um único isomorfismo canônico entre eles, não importa qual modelo de Peano foi tomado para definir a composição repetida, pois todos produzem o mesmo efeito e geram as mesmas funções.