Uma breve(íssima) apresentação aos pequenos cardinais

Adriana Mayumi Shiguihara NUSP: 10263910
Eduardo Ventilari Sodré NUSP: 11222183
Rodolfo César Macedo Soares NUSP: 10298054

1 de agosto de 2021

1 Introdução e Motivação

A Hipótese do Contínuo (CH) e as conclusões de independência sobre ela são possivelmente uns dos resultados mais icônicos da teoria de conjuntos moderna. Lembra-se que o enunciado de CH é que $\omega_1 = \mathfrak{c}$, ou seja, que o primeiro cardinal não-enumerável é o contínuo $\mathfrak{c} = 2^\omega$, sendo um resultado independente dos axiomas usuais de ZFC.

Uma questão que pode surgir a partir dessas conclusões é acerca de quais seriam as cardinalidades κ tais que $\omega_1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$; mais especificamente, que conjuntos admitiriam tais cardinalidades. De fato, para determinadas propriedades combinatóricas, ao tomar a menor cardinalidade de uma família de objetos que satisfaça tal propriedade, ela deve ser um "cardinal pequeno", isto é, não-enumerável e menor ou igual ao contínuo.

Outra maneira em que tais cardinalidades aparecem naturalmente é se perguntando que tipos de resultados em análise e topologia, válidos para famílias enumeráveis de objetos, deixam de valer ao assumir cardinalidades maiores, e para quais cardinalidades. Os seguintes resultados, por exemplo, deixam de valer assumindo cardinalidade $\mathfrak{c}$:

- (Teorema de Baire) Num espaço topológico localmente compacto Hausdorff, a interseção *enumerável* de abertos denso é densa;

- A união *enumerável* de conjuntos Lebesgue-mensuráveis de medida nula tem medida nula;

- Dada quantidade *enumerável* de sequências $S_k = (x_{k,n})_{n\in\omega}$ limitadas de reais, existe conjunto infinito de índices $A \subseteq \omega$ tal que todas as subsequências $S_k|_A = (x_{k,n})_{n\in A}$ induzidas por esse conjunto de índices convergem.

E embora as cardinalidades definidas a partir dessas considerações possam muitas vezes não ser explicitamente descritas, pode-se obter diversas relações de desigualdade *entre* elas. Isto permite construir um esquema geral de como tais cardinalidades se comparam entre ω_1 e $\mathfrak{c}$, mostrando relação profunda com as próprias propriedades combinatóricas utilizadas para defini-las.

Neste trabalho, definimos diversos destes "cardinais pequenos", e demonstramos alguns resultados de comparação entre eles a fim de montar um esquema geral de desigualdades. Também mencionamos alguns resultados modernos de independência entre eles, que afirmam a consistência com ZFC de enunciados sobre desigualdade estrita ou igualdade entre esses cardinais.

Observação. Para não perder a consistência com o nome e da escolha de letras da literatura em inglês, alguns dos cardinais serão apresentados por seu nome em inglês.

2 Os cardinais $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{d}$

Nossos dois primeiros exemplos de pequenos cardinais relacionam funções de ω^ω por um ordenamento alternativo que surge da noção de uma função *dominar* a outra.

Definição 2.1 (Relação $<^*$)**.** Sejam $f, g \in \omega^\omega$, dizemos que g *domina* f, denotando por $f <^* g$, quando existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ temos $f(n) < g(n)$ no ordenamento estrito usual de inteiros.

Em outras palavras, g domina f quando $f(n)$ é maior que $g(n)$ somente para um número finito de naturais n.

Lema 2.1. *A relação $<^*$ é um ordenamento estrito em ω^ω.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \omega^\omega$, supondo que $f <^* g$, então $g(n) > f(n)$ para um número finito de naturais n, isso nos dá que não existe inteiro n_0 tal que para todo $m > n_0$ valha $f(n) > g(n)$. Concluímos que $f <^* g$ implica que não ocorre $g <^* f$.

Dada $h \in \omega^\omega$ e supondo que $f <^* g$ e $g <^* h$ são válidas, então existem n_0 e n_1 para a condição das relações, tomando $m_0 = \max\{n_0, n_1\}$ temos que para todo $n \geq m_0$ vale $f(n) < g(n) < h(n)$. Logo, vale que $f <^* h$ implicando que a relação é transitiva. Portanto, $<^*$ é ordenamento estrito. □

Vamos ressaltar que $<^*$ não é uma ordem linear pelos seguintes exemplos, sejam $f, g \in \omega^\omega$:

1. *Exemplo trivial:* Sejam f, g funções tais que existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ $f(n) = g(n)$. Como a definição usa o ordenamento estrito usual dos naturais, não ocorre que $f <^* g$ nem $g <^* f$.

2. Seja $m > 0$ e $f(n) = m$ para todo n. Defino:

$$g(n) = \begin{cases} m+1 & \text{se } n = 2k \\ m-1 & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

   temos que ocorre tanto $g(n) > f(n)$ e $f(n) < g(n)$ para um número infinito de naturais n, logo, não são relacionáveis.

Para falar dos cardinais $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{d}$, construímos famílias de funções em ω^ω com propriedades relacionadas a esse ordenamento.

Definição 2.2 (Família Dominante)**.** Uma família $\mathscr{D} \subset \omega^\omega$ é dita *dominante* sse para cada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathscr{D}$ de forma que $f <^* g$.

Definição 2.3 (Número Dominante)**.** O *número dominante* $\mathfrak{d}$ é a menor cardinalidade de qualquer família dominante, formalmente:

$$\mathfrak{d} = \min\{|\mathscr{D}| : \mathscr{D} \text{ é família dominante}\}$$

Definição 2.4 (Família Não-Limitada)**.** Uma família $\mathscr{B} \subset \omega^\omega$ é *não limitada* se não existe função $f \in \omega^\omega$ que domina todas as funções de $\mathscr{B}$.

Definição 2.5 (Número Limitante)**.** O *número limitante* $\mathfrak{b}$ é a menor cardinalidade de qualquer família não limitada, isto é:

$$\mathfrak{b} = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subset \omega^\omega \text{ é não limitada}\}$$

O conjunto ω^ω é exemplo de família dominante, que também é não limitada. Pela boa ordenação dos cardinais, esses dois números estão bem definidos.

Considerando a relação usual de ordem dos cardinais, conseguimos provar relações entre eles:

Proposição 2.1. $\omega_1 \leq \mathfrak{b}$.

Demonstração. Mostrando que toda família enumerável de funções é limitada:

Seja $\mathscr{E} = \{g_n \in \omega^\omega : n \in \omega\}$ família enumerável, definimos uma função $f \in \omega^\omega$ da seguinte forma, para cada $k \in \omega$:

$$f(k) = \bigcup\{g_i(k) : i \in k\}$$

ou seja, para cada k estamos tomando o máximo das k primeiras funções calculadas em k.

Então, para todo $k \in \omega$ e cada $i \in k$ temos que $f(k) \geq g_i(k)$ e concluímos que para todo $n \in \omega$, $g_n <^* f$, implicando que f domina todas a funções da família enumerável. $\square$

Proposição 2.2. *Vale a relação* $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$.

Demonstração. Basta provar que toda família dominante é não-limitada. Seja $\mathscr{D} \subseteq \omega^\omega$ família dominante e tomando $f \in \omega^\omega$ arbitrária. Existe $g \in \mathscr{D}$ tal que $f <^* g$ tal que n_0 tal que para todo $k \geq n_0$, $f(k) < g(k)$. Portanto, g não é dominada por nenhuma f, dado que f é arbitrário temos que $\mathscr{D}$ é não-limitado. $\square$

Esses dois cardinais também poderiam ser definidos em relação ao ordenamento usual de funções:

$$f < g \longleftrightarrow \forall k \in \omega(f(k) < g(k))$$

e é possível mostrar que o número $\mathfrak{d}$ continua sendo o mesmo mas $\mathfrak{b} = \omega$ pois nesse caso a família de funções constantes é não-limitada.

Esses dois números são exemplos de contruções simples de pequenos cardinais, para explorar melhor essa relações, vamos definir alguns outros cardinais nas próximas seções.

3 O cardinal $\mathfrak{s}$

Definiremos agora o *número splitting*, que tem relação com a questão levantada na introdução sobre convergência de subsequências induzidas pelo mesmo subconjunto de índices.

Começamos fazendo algumas definições auxiliares. Utilizaremos $[\omega]^\omega$ para denotar o conjunto dos subconjuntos infinitos de ω.

Definição 3.1. Dados $X \subseteq \omega$ e $Y \in [\omega]^\omega$, dizemos que X *divide* Y se ambos $Y \cap X$ e $Y \setminus X$ são infinitos. Uma família $\mathscr{S}$ de subconjuntos de ω é chamada *família splitting* se para todo $Y \in [\omega]^\omega$ existe $X \in \mathscr{S}$ que divide Y.

Ou seja, X divide Y se "particiona Y em pedaços grandes".

Exemplo 1. Se $Y = \omega$ e se X for o conjunto dos naturais pares, temos que X divide Y, já que $X \cap Y = X$ e $Y \setminus X$ é o conjunto dos naturais ímpares.

Exemplo 2. $\mathscr{P}(\omega)$ é família splitting. De fato, dado $Y \in [\omega]^\omega$, temos bijeção $f \colon \omega \to Y$, e então $f(X)$ divide Y, em que X é definido como no exemplo 1.

Com o exemplo 2, garantimos a existência de uma família splitting. Assim, podemos fazer a seguinte definição[1]:

Definição 3.2. O *número splitting* $\mathfrak{s}$ é o cardinal correspondente à menor cardinalidade possível de uma família splitting. Isto é,

$$\mathfrak{s} := \min\{|\mathscr{S}| : \mathscr{S} \text{ é família splitting}\}.$$

Provaremos que o número splitting é realmente um pequeno cardinal, ou seja, $\omega_1 \leq \mathfrak{s} \leq \mathfrak{c}$. Mais que isso, veremos também que o número splitting é menor ou igual ao número dominante.

Provemos primeiro um lema técnico:

Lema 3.1. *Seja $\{X_n : n \in \omega\}$ uma família de subconjuntos infinitos de ω. Então existem*

1. *uma cadeia descendente de subconjuntos infinitos de ω*

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

   tal que, para cada $n \in \omega$, o conjunto A_n está contido em X_n ou no complementar de X_n;

2. *uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ com $a_n \in A_n$ para cada n e cujos elementos são dois a dois distintos.*

Demonstração. Seja $f\colon \mathscr{P}(U) \times \omega \to \mathscr{P}(U)$, em que $U := \bigcup_{n\in\omega} X_n$, dada por

$$f(z,n) := \begin{cases} z \cap X_{n+1} \text{ se } z \cap X_{n+1} \text{ for infinito} \\ z \setminus X_{n+1} \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Pelo Teorema da Recursão, existe uma única função $A\colon \omega \to \mathscr{P}(U)$ tal que $A(0) = X_0$ e que, para todo $n \in \omega$, $A(n+1) = f(A(n), n)$. É fácil ver que os $A_n := A(n)$ nos dão uma cadeia com as propriedades desejadas.

Intuitivamente, poderíamos definir $(a_n)_{n\in\omega}$ colocando $a_0 \in A_0$ qualquer e, para cada n, escolhendo $a_{n+1} \in A_{n+1} \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, o que seria possível pois os A_n são infinitos.

De forma mais precisa: seja $g\colon \mathscr{P}_\infty(U) \times \mathscr{P}_{fin}(U) \to U$ uma função auxiliar que a cada par (z, w) associa um elemento de $z \setminus w$, em que $\mathscr{P}_\infty(U)$

[1] O conjunto $\{|\mathscr{S}| : \mathscr{S} \text{ é família splitting}\}$ é respaldado pelo Axioma da Substituição e é subconjunto não vazio do ordinal $\bigcup\{|\mathscr{S}| : \mathscr{S} \text{ é família splitting}\}$, logo tem mínimo.

e $\mathscr{P}_{fin}(U)$ denotam respectivamente o conjunto das partes infinitas de U e o conjunto das partes finitas de U. Definamos agora uma função

$$h\colon \mathscr{P}_\infty(U) \times \mathscr{P}_{fin}(U) \times U \times \omega \to \mathscr{P}_\infty(U) \times \mathscr{P}_{fin}(U) \times U$$

tal que

$$h(z, w, x, n) = \Big(z \cap X_{n+1}, w \cup \{g(z \cap X_{n+1}, w)\}, g(z \cap X_{n+1}, w)\Big)$$

se $z \cap X_{n+1}$ for infinito e

$$h(z, w, x, n) = \Big(z \setminus X_{n+1}, w \cup \{g(z \setminus X_{n+1}, w)\}, g(z \setminus X_{n+1}, w)\Big)$$

caso contrário.

Então existe uma única função $K\colon \omega \to \mathscr{P}_\infty(U) \times \mathscr{P}_{fin}(U) \times U$ tal que $K(0) = (A_0, \{a_0\}, a_0)$, em que a_0 é um elemento qualquer de A_0, e que para cada $n \in \omega$ valha que $K(n+1) = h(K(n), n)$. Definindo a_n como a terceira entrada de $K(n)$, para cada $n \in \omega$, temos a sequência desejada. $\square$

Vamos agora à demonstração de que o número splitting é um pequeno cardinal.

Teorema 3.1. $\omega_1 \leq \mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$.

Demonstração. Comecemos pela desigualdade esquerda. Para isso, vamos provar que nenhuma família enumerável pode ser splitting.

Seja $\mathscr{F}$ uma família enumerável qualquer de subconjuntos de ω. Se existir $X \in \mathscr{F}$ finito, então $\omega \cap X$ será finito, logo X não dividirá ω, e portanto $\mathscr{F}$ não será família splitting.

Suponhamos agora que todos os elementos de $\mathscr{F}$ sejam conjuntos infinitos. Podemos escrever $\mathscr{F} = \{X_n : n \in \omega\}$, com $X_n \subseteq \omega$ para todo n. Desejamos demonstrar que existe $Y \subseteq [\omega]^\omega$ que não é dividido por nenhum dos X_n.

Seja

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

uma cadeia de subconjuntos infinitos de ω como no lema 3.1, isto é, tal que

$$\forall n \in \omega (A_n \subseteq X_n \vee A_n \subseteq \omega \setminus X_n),$$

e seja $(a_n)_{n\in\omega}$ também como no mesmo lema. Definamos

$$Y := \{a_n : n \in \omega\}.$$

Fixado $n \in \omega$, temos que, para cada $k \in \omega$ menor que n, $a_k \in A_k \subseteq A_n$, logo

$$Y \setminus A_n \subseteq \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}.$$

Assim, $Y \setminus A_n$ é finito.

Temos duas possibilidades, dado esse n: ou A_n está contido em X_n, ou A_n está contido no complementar de X_n em ω.

- ◇ Se $A_n \subseteq X_n$, então $Y \setminus X_n \subseteq Y \setminus A_n$, logo $Y \setminus X_n$ é finito.
- ◇ Se $A_n \subseteq \omega \setminus X_n$, temos que $Y \cap X_n \subseteq Y \setminus A_n$, logo $Y \cap X_n$ é finito.

Portanto, em qualquer caso X_n não divide Y. Como havíamos fixado um n qualquer em ω, isso vale para todo elemento de ω, e consequentemente $\mathscr{F}$ não é família splitting.

Segue que não existe família splitting enumerável, e então $\omega_0 < \mathfrak{s}$ (já que evidentemente não existe família splitting finita).

Façamos agora a desigualdade da direita.

Seja $\mathscr{D} \subseteq \omega^\omega$ uma família dominante com $|\mathscr{D}| = \mathfrak{d}$. Construiremos família splitting $\mathscr{S}$ com cardinalidade menor ou igual que a de $\mathscr{D}$. Pela definição de $\mathfrak{s}$ e pela nossa escolha de $\mathscr{D}$, isso implicará

$$\mathfrak{s} \leq |\mathscr{S}| \leq |\mathscr{D}| = \mathfrak{d}.$$

Se $f\colon \omega \to \omega$ não é estritamente crescente, então a função $f'\colon \omega \to \omega$ definida recursivamente por

$$f'(0) := 1, \qquad f'(n+1) := f(n+1) + f'(n) + 1 \quad \forall n \in \omega$$

domina f (logo domina qualquer $g \in \omega^\omega$ dominada por f). Assim, trocando cada f em $\mathscr{D}$ por f', a família continua sendo splitting. Além disso, f' é estritamente crescente e $f'(0) > 0$.

Podemos portanto supor que toda $f \in \mathscr{D}$ é estritamente crescente com $f(0) > 0$. Então temos sequências estritamente crescentes

$$0 < f(0) < f^2(0) < f^3(0) < f^4(0) < \dots$$

Para cada $f \in \mathscr{D}$, definamos

$$\sigma_f := \bigcup_{n \in \omega} \{k \in \omega : f^{2n}(0) \leq k < f^{2n+1}(0)\},$$

como ilustrado na figura 3.1.

O conjunto

$$\mathscr{S} := \{\sigma_f : f \in \mathscr{D}\}$$

tem cardinalidade menor ou igual à de $\mathscr{D}$, já que $f \mapsto \sigma_f$ é sobrejeção; verifiquemos que $\mathscr{S}$ é família splitting.

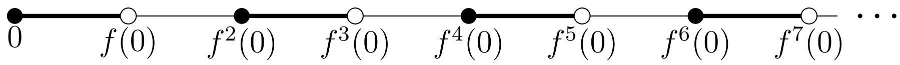


Figura 1: Ilustração do conjunto σ_f.

Dado $Y \in [\omega]^\omega$, temos bijeção estritamente crescente $g\colon \omega \to Y$. Por exemplo, podemos definir recursivamente

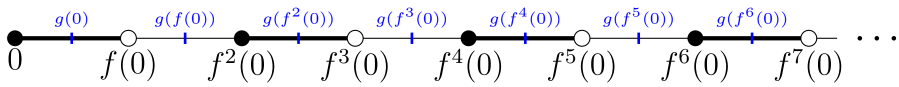
$$g(0) := \min(Y), \qquad g(n+1) := \min(Y \setminus \{g(0), \dots, g(n)\}) \quad \forall n \in \omega.$$

Como $\mathscr{D}$ é família dominante, existe $f \in \mathscr{D}$ que domina g, ou seja, para algum $n_0 \in \omega$ vale que, se $k \geq n_0$, então $g(k) < f(k)$. Mostraremos que σ_f divide Y.

Sendo g e $(f^l(0))_{l\in\omega}$ estritamente crescentes, temos que, para todo $l \in \omega$, $l \leq g(l)$ e $l \leq f^l(0)$. Assim, se $k \geq n_0$, temos $f^k(0) \leq g(f^k(0))$ e $n_0 \leq f^k(0)$, donde $g(f^k(0)) < f(f^k(0))$, portanto

$$f^k(0) \leq g(f^k(0)) < f(f^k(0)) = f^{k+1}(0).$$

Figura 2: Ilustração da posição dos $g(f^k(0))$ em relação a σ_f para o caso em que $n_0 = 0$.



Segue que, se $k \geq n_0$, então $g(f^k(0)) \in \sigma_f$ se e somente se k é par. Consequentemente, os conjuntos descritos por $A := \{g(f^k(0)) : k \geq n_0 \text{ e } k \text{ é par}\}$ e $B := \{g(f^k(0)) : k \geq n_0 \text{ e } k \text{ é ímpar}\}$ estão contidos respectivamente em $Y \cap \sigma_f$ e em $Y \setminus \sigma_f$. Como g é injetora, A e B são infinitos, logo $Y \cap \sigma_f$ e $Y \setminus \sigma_f$ são infinitos, e então σ_f divide Y.

Concluímos por fim que $\mathscr{S}$ é família splitting, e como já argumentado isso implica $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$. $\square$

Agora que definimos o número splitting e verificamos que ele é um pequeno cardinal, finalmente abordaremos a questão das subsequências.

Para famílias enumeráveis de sequências de números reais, vale o resultado abaixo:

Teorema 3.2. *Dada uma família de sequências limitadas em* $\mathbb{R}$

$$(x_n^{(k)})_{n\in\omega}, \quad k \in \omega_0,$$

existe $I \in [\omega]^\omega$ tal que as subsequências

$$(x_n^{(k)})_{n\in I}, \quad k \in \omega_0$$

são convergentes.

Se trocarmos ω_0 acima por $\mathfrak{c}$ (i.e. se tomarmos uma família com cardinalidade contínua em vez de enumerável), a afirmação do teorema se torna falsa. Para ver isso, basta notar que, para cada $I \in [\omega]^\omega$, a sequência que alterna entre 0 e 1 em I não converge, e portanto a família de todas as sequências formadas por 0 e 1 (isto é, $\{0,1\}^\omega$) seria um contraexemplo.

Cabe então perguntar o que acontece entre ω_0 e $\mathfrak{c}$. Por exemplo, trocando ω_0 por $\mathfrak{s}$, a sentença continuaria válida? Veremos que não e, ainda mais, que $\mathfrak{s}$ é o menor cardinal que invalida a afirmação.

Usaremos a notação abaixo de forma provisória:

- ◇ Denotaremos por α a menor cardinalidade possível de uma família de sequências limitadas em $\mathbb{R}$ tal que para cada $I \in [\omega]^\omega$ alguma das subsequências correspondentes não converge. Isto é, existe $(x_n)_{n\in\omega}$ na família tal que $(x_n)_{n\in I}$ não converge.

- ◇ Denotaremos por β o cardinal análogo para sequências em $\{0,1\}^\omega$: ou seja, β é a menor cardinalidade de uma família de sequências de 0 e 1 tal que para cada $I \in [\omega]^\omega$ alguma das subsequências correspondentes não converge.

Tanto α quanto β estão bem definidos, já que toda sequência de 0 e 1 é também uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, e portanto já temos um exemplo de família das formas mencionadas. Feita essa observação, também é evidente que $\alpha \leq \beta$.

Lema 3.2. *$\beta \leq \mathfrak{s}$.*

Demonstração. Verificaremos que existe família de sequências de 0 e 1 com a cardinalidade de $\mathfrak{s}$ tal que $\forall I \in [\omega]^\omega$ alguma das subsequências correspondentes não converge.

Seja $\mathscr{S}$ uma família splitting com cardinalidade de $\mathfrak{s}$; podemos escrever $\mathscr{S} = \{X_k : k \in \mathfrak{s}\}$. Para cada $n \in \omega$, definamos

$$x_n^{(k)} := \begin{cases} 1, & n \in X_k \\ 0, & n \notin X_k \end{cases}$$

Ou seja, a sequência $x^{(k)} \in \{0,1\}^\omega$, dada por $n \mapsto x_n^{(k)}$, é a função característica de $X_k \subseteq \omega$. Portanto, a família $\mathscr{F} := \{x_n^{(k)} : k \in \mathfrak{s}\}$ tem a cardinalidade do número splitting.

Vamos agora avaliar o que acontece quando uma sequência de $\mathscr{F}$ restrita a I converge. Para tanto, convém notar que uma sequência de 0 e 1 converge em $\mathbb{R}$ se e somente se é finalmente constante.

Dado $I \in [\omega]^\omega$, seja $l \in \mathfrak{s}$ tal que $(x_n^{(l)})_{n\in I}$ converge. Então existe $n_0 \in \omega$ tal que um dos dois ocorre:

1. Para todo $n \in I$ com $n \geq n_0$, vale que $x_n^{(l)} = 0$.

2. Para todo $n \in I$ com $n \geq n_0$, vale que $x_n^{(l)} = 1$.

Se 1, então para todo $n \in I$ maior ou igual a n_0 temos que $n \notin X_l$, pela definição de $x^{(l)}$. Portanto,

$$I \cap X_l \subseteq \{n \in I : n < n_0\},$$

logo I $\cap X_l$ é finito, e assim X_l não divide I.

Já no caso 2, pelo mesmo raciocínio obtemos

$$I \setminus X_l \subseteq \{n \in I : n < n_0\},$$

implicando também que X_l não divide I.

Como $\mathscr{S}$ é família splitting, existe $k \in \mathfrak{s}$ tal que X_k divide I. Então, pelo que vimos acima, a restrição da sequência $x^{(k)}$ a I não pode convergir. Dessa forma,

$$\beta \leq |\mathscr{S}| = \mathfrak{s}.$$

□

Na prova acima, começamos com uma família de conjuntos e interpretamos suas funções características como sequências. Já para relacionar α e $\mathfrak{s}$, começaremos com sequências e as interpretaremos como funções características, que por fim nos fornecerão conjuntos. Para aplicarmos essa estratégia, usaremos expansões binárias, e assim o seguinte resultado será útil:

Lema 3.3. *Seja $x = (x_n)_{n\in\omega}$ sequência limitada em $\mathbb{R}$, e seja*

$$\ldots, x_n^{(-2)}, x_n^{(-1)}, x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots$$

uma expansão binária de x_n para cada $n \in \omega$. Se para cada $k \in \mathbb{Z}$ temos $x^{(k)} := (x_n^{(k)})_{n\in\omega}$ convergente, então x é convergente.

Demonstração. Para cada $n \in \omega$,

$$x_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k x_n^{(k)}.$$

Como x é limitada, existe $p \in \omega$ tal que, para todo $n \in \omega$ e todo $k \geq p$, temos $x_n^{(k)} = 0$.

Seja
$$a := \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k a_k = \sum_{k<p} 2^k a_k,$$
em que, para cada $n \in \omega$,
$$a_k := \lim_{n \to \infty} x_n^{(k)}.$$
Veremos que x converge para a.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{k\in\omega} \frac{1}{2^k}$ converge, existe $q \in \omega$ tal que
$$\sum_{k \geq q} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja então $n_0 \in \omega$ tal que, para todo $n \geq n_0$ e todo $k \in \mathbb{Z}$ com $-q < k < p$,
$$|x_n^{(k)} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2^{2k+q+1}}.$$

Assim, para todo $n \geq n_0$, temos
$$\begin{aligned}
|x_n - a| &= \left| \sum_{k<p} 2^k x_n^{(k)} - \sum_{k<p} 2^k a_k \right| = \left| \sum_{k<p} 2^k (x_n^{(k)} - a_k) \right| \\
&\leq \sum_{k<p} 2^k |x_n^{(k)} - a_k| < \left(\sum_{-q<k<p} 2^k |x_n^{(k)} - a_k| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \sum_{-q<k<p} 2^k \frac{\varepsilon}{2^{2k+q+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Temos assim a ferramenta que viabilizará nossa prova da seguinte relação:

Lema 3.4. $\mathfrak{s} \leq \alpha$.

Demonstração. Basta encontrar família splitting com cardinalidade menor ou igual à de α.

Seja $\mathscr{F}$ uma família de sequências limitadas de números reais tal que para cada $I \in [\omega]^\omega$ exista $x \in I$ cuja restrição a I não converge e tal que $|\mathscr{F}| = \alpha$.

Como qualquer subsequência de uma sequência convergente é convergente, a família $\mathscr{F}$ mantém a propriedade descrita acima mesmo que excluamos as sequências convergentes. Portanto, podemos supor que nenhum elemento de $\mathscr{F}$ converge.

Temos em mãos sequências de números reais, mas para obtermos funções características gostaríamos de ter sequências de 0 e 1. Para isso, escreveremos cada termo de cada sequência como uma das suas expansões binárias.

Se $x = (x_n)_{n\in\omega} \in \mathscr{F}$, seja $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ uma expansão binária de x_n, para cada $n \in \omega$. Para cada $x \in \mathscr{F}$ e cada $k \in \mathbb{Z}$, definamos

$$S_{x,k} := \{n \in \omega : x_n^{(k)} = 1\},$$

Definamos também

$$\mathscr{S} := \{S_{x,k} : x \in \mathscr{F},\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dado $I \in [\omega]^\omega$, existe $x \in \mathscr{F}$ tal que $(x_n)_{n\in I}$ não converge. Agora, pelo lema 3.3, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que a sequência $(x_n^{(k)})_{n\in I}$ não converge. Isso significa que na restrição de $x^{(k)}$ a I existem infinitos termos iguais a 0 e infinitos termos iguais a 1. Portanto, os conjuntos

$$I \cap S_{x,k} = \{n \in I : x_n^{(k)} = 1\}$$

e

$$I \setminus S_{x,k} = \{n \in I : x_n^{(k)} = 0\}$$

são infinitos, e assim $S_{x,k}$ divide I. Segue que $\mathscr{S} := \{S_x : x \in \mathscr{F}\}$ é família splitting, e consequentemente

$$\mathfrak{s} \leq |\mathscr{S}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathscr{F}| = \max\{\omega_0, \alpha\} = \alpha.$$

$\square$

Com os resultados acima, podemos finalmente caracterizar o número splitting como comentamos:

Teorema 3.3. *$\mathfrak{s}$ é a menor cardinalidade possível de qualquer família de sequências limitadas de reais $(x_n^{(k)})_{n\in\omega}$ tal que $\forall I \in [\omega]^\omega$ existe k para o qual a subsequência $(x_n^{(k)})_{n\in I}$ não converge.*

O mesmo vale se considerarmos apenas sequências de $\{0,1\}^\omega$.

Demonstração. Usando os lemas 3.2 e 3.4 e o fato de que $\alpha \leq \beta$, temos

$$\alpha \leq \beta \leq \mathfrak{s} \leq \alpha,$$

portanto são todos iguais.

$\square$

4 O Cardinal $\mathfrak{r}$

Munidos ainda da noção de um conjunto em $[\omega]^\omega$ dividir outro, introduz-se uma noção de certo modo dual àquela de uma família de uma família splitting. Uma família $\mathscr{R} \subseteq [\omega]^\omega$ é dita **reaping** ou **unsplitting** se não existe $x \in [\omega]^\omega$ que divide todos os elementos de $\mathscr{R}$; ou seja,

$$\forall x \in [\omega]^\omega, \exists y \in \mathscr{R} \text{ tal que } y \cap x \text{ é finito ou } y \setminus x \text{ é finito.}$$

Observe que $[\omega]^\omega$ é família reaping, pois para todo $x \in [\omega]^\omega$, $x \setminus x$ é finito, de modo que x não divide x. Intuitivamente, as famílias reaping devem ser numerosas, para que sempre exista y não divisível na família. Define-se então o **número de reaping** como a menor cardinalidade de uma família reaping:

$$\mathfrak{r} := \{|\mathscr{R}| \colon \mathscr{R} \subseteq [\omega]^\omega \text{ é família reaping}\}$$

Como $[\omega]^\omega$ é família reaping, naturalmente tem-se que $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{c}$. Para que $\mathfrak{r}$ seja um pequeno cardinal, ainda é necessário verificar que $\omega_1 \leq \mathfrak{r}$, ou seja, que toda família enumerável de conjuntos de $[\omega]^\omega$ não é reaping. Na verdade, reutilizando ideias já vistas em outros pequenos cardinais, é possível garantir algo mais forte:

Teorema 4.1. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$.

Demonstração. A estratégia será mostrar que, se $\mathscr{E} = \{x_\xi : \xi \in \kappa\} \subseteq [\omega]^\omega$ é família de cardinalidade $|\mathscr{E}| = \kappa < \mathfrak{b}$, então $\mathscr{E}$ não poderá ser reaping. Para todo $x_\xi \in \mathscr{E}$, denote por $g_\xi : \omega \to x_\xi \setminus \{0\}$ a única bijeção crescente de ω para $x_\xi \setminus \{0\}$. Defina ainda, para cada $\xi \in \kappa$, a função $\tilde{g}_\xi : \omega \to \omega$ dada por

$$\tilde{g}_\xi(k) = g_\xi^k(0).$$

Obtém-se assim a família $\tilde{\mathscr{E}} = \{\tilde{g}_\xi : \xi \in \kappa\}$, de cardinalidade

$$|\tilde{\mathscr{E}}| \leq |\mathscr{E}| = \kappa < \mathfrak{b}.$$

Isto diretamente implica que a família $\tilde{\mathscr{E}}$ é limitada, existindo $f \in \omega^\omega$ tal que $\tilde{g}_\xi <^* f$ para todo $\xi \in \kappa$. A função f permitirá construir um conjunto que dividirá todo elemento da família $\mathscr{E}$: constrói-se

$$x_f = \bigcup_{k=0} [f^{2k}(0), f^{2k+1}(0)),$$

onde o intervalo é tomado sobre valores inteiros. Desta maneira, para todo $\xi \in \kappa$ existe $n_\xi \in \omega$ tal que para $k \geq n_\xi$, $\tilde{g}_\xi(k) < f(k)$, e portanto

$$f^k(0) \leq \tilde{g}_\xi(f^k(0)) < f(f^k(0)) = f^{k+1}(0).$$

Assim, se k é par, $\tilde{g}_\xi(f^k(0)) \in x_\xi \cap x_f$, e se k é impar, $\tilde{g}_\xi(f^k(0)) \in x_\xi \setminus x_f$, concluindo que x_f divide x_ξ, para todo $x_\xi \in \mathscr{E}$. $\square$

Analogamente ao pequeno cardinal $\mathfrak{s}$, é possível traçar uma descrição equivalente de $\mathfrak{r}$ em termos de famílias de subsequências e convergência em conjuntos infinitos de índices. A mesma dualidade entre os cardinais $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{r}$, em que o primeiro trata de famílias de conjuntos que dividem outros, e o segundo de famílias de conjuntos que não são divididos, é repetida nesse contexto:

Teorema 4.2. *$\mathfrak{r}$ é a menor cardinalidade de uma família de conjuntos de índices $I \in [\omega]^\omega$ tal que, para toda sequência $(x_n)_\omega$ em $\{0,1\}^\omega$, existe I na família para o qual a subsequência $(x_n)_{n\in I}$ converge.*

A demonstração deste resultado advém dos mesmos princípios utilizados para o cardinal $\mathfrak{s}$, em que, se $(x_n)_{n\in\omega}$ é sequência em $\{0,1\}^\omega$, pode-se interpretá-la como a função característica de um conjunto $X \subseteq \omega$. Assim, dado um conjunto de índices $I \in [\omega]^\omega$, tem-se que

$$X \text{ não divide } I \leftrightarrow (x_n)_{n\in I} \text{ é eventualmente constante.}$$

Enquanto o cardinal $\mathfrak{s}$ remete a famílias de sequências, o cardinal $\mathfrak{r}$ se refere a famílias de conjuntos de índices. Em breve, uma descrição mais concisa dessa dualidade e de outras poderá ser feita com um ferramentário matemático adequado, as conexões de Galois–Tuckey.

5 Ideais de Subconjuntos

Lembra-se que uma das principais motivações para o desenvolvimento da teoria de pequenos cardinais é entender a partir de que cardinalidade certos resultados, que valem para objetos enumeráveis, deixam de valer. Um dos exemplos mencionados é a pergunta de qual deve ser a cardinalidade da menor família de conjuntos Lebesgue-mensuráveis de medida nula cuja união não possui medida nula. Diversas outras questões similares podem ser postas sobre conjuntos de medida nula, e objetos similares.

Seja X um conjunto não-vazio qualquer, e $I \subseteq \mathscr{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathscr{I}$ é um **ideal** de subconjuntos de X se:

- $\emptyset \in \mathscr{I}$;
- Se $A \in \mathscr{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathscr{I}$;
- Se $A, B \in \mathscr{I}$, então $A \cup B \in \mathscr{I}$.

$\mathscr{I}$ é dito um **ideal próprio** se $X \notin \mathscr{I}$. A intuição por trás desta definição é a ideia de que declaramos quais subconjuntos de X são "pequenos", e que propriedades naturais tais conjuntos satisfariam, sendo fechados por subconjuntos e uniões finitas. Note que a noção dual de um ideal é a de um filtro, em que se declaram quais subconjuntos de X são "grandes".

Percebe-se que o exemplo discutido de $\mathscr{L}$, a família dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis de medida nula, é um ideal próprio. Outro exemplo importante para topologia é o ideal $\mathscr{B}$ dos conjuntos magros, aqueles que são união enumerável de conjuntos nowhere dense de $\mathbb{R}$. Eles estão intimamente ligados com a maioria das formulações do teorema de Baire em espaços topológicos. Percebe-se ainda que estes são exemplos de **σ-ideais**, sendo fechados por uniões enumeráveis, levando ao questionamento de para qual cardinalidade essa propriedade deixa de ser preservada.

Dado um ideal próprio $\mathscr{I}$ em X que contém todos os conjuntos unitários de X, define-se:

- A *aditividade* de $\mathscr{I}$, $\mathbf{add}(\mathscr{I})$, a menor quantidade de conjuntos de $\mathscr{I}$ cuja união não está em $\mathscr{I}$:
$$\mathbf{add}(\mathscr{I}) = \min\{|\mathscr{F}|\colon \mathscr{F} \subseteq \mathscr{I},\ \bigcup \mathscr{F} \notin \mathscr{I}\};$$
- O *número de cobertura* de $\mathscr{I}$, $\mathbf{cov}(\mathscr{I})$, a menor quantidade de conjuntos de $\mathscr{I}$ cuja união é X:
$$\mathbf{cov}(\mathscr{I}) = \min\{|\mathscr{F}|\colon \mathscr{F} \subseteq \mathscr{I},\ \bigcup \mathscr{F} = X\};$$
- A *uniformidade* de $\mathscr{I}$, $\mathbf{non}(\mathscr{I})$, a menor cardinalidade de um subconjunto de X que não pertence a $\mathscr{I}$:
$$\mathbf{non}(\mathscr{I}) = \min\{|Y|\colon Y \subseteq X,\ Y \notin \mathscr{I}\};$$
- E a *cofinalidade* de $\mathscr{I}$, $\mathbf{cof}(\mathscr{I})$, a menor cardinalidade de qualquer subconjunto $\mathscr{B}$ de $\mathscr{I}$ tal que todo elemento de $\mathscr{I}$ é subconjunto de um elemento de $\mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ é dita uma *base* de $\mathscr{I}$):
$$\mathbf{cof}(\mathscr{I}) = \min\{|\mathscr{B}|\colon \mathscr{B} \subseteq \mathscr{I},\ \forall A \in \mathscr{I}, \exists B \in \mathscr{B}(A \subseteq B)\}.$$

Observa-se como tais cardinalidades sintetizam as perguntas discutidas acima, e no caso dos σ-ideais $\mathscr{L}$ e $\mathscr{B}$, naturalmente tem-se que elas são pequenos cardinais. A cofinalidade é devido a possuírem base consistindo de conjuntos borelianos.

Proposição 5.1. *Dado um ideal próprio $\mathscr{I}$ de X contendo todos os conjuntos unitários, sempre vale*
$$\mathbf{add}(\mathscr{I}) \leq \min\{\mathbf{cov}(\mathscr{I}), \mathbf{non}(\mathscr{I})\},$$
$$\max\{\mathbf{cov}(\mathscr{I}), \mathbf{non}(\mathscr{I})\} \leq \mathbf{cof}(\mathscr{I}).$$

Demonstração. A verificação de que $\mathbf{add}(\mathscr{I}) \leq \mathbf{cov}(\mathscr{I})$ é consequência simples de $\mathscr{I}$ ser ideal próprio, ou seja, $X \notin \mathscr{I}$. Que $\mathbf{add}(\mathscr{I}) \leq \mathbf{non}(\mathscr{I})$ é verdade vem de que, para todo $Y \subseteq X$, $Y = \bigcup_{a \in Y}\{a\}$, com $\{a\} \in \mathscr{I}$. $\mathbf{cov}(\mathscr{I}) \leq \mathbf{cof}(\mathscr{I})$ pois, dada uma base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{I}$, tem-se que $\bigcup \mathscr{B} = X$, pois $\mathscr{B}$ contém como subconjuntos todos os conjuntos unitários, e portanto $\bigcup \mathscr{B}$ contém todos os elementos. Por fim, $\mathbf{non}(\mathscr{I}) \leq \mathbf{cof}(\mathscr{I})$ vale pois, para todo $B_\xi \in \mathscr{B}$, toma-se $b_\xi \in X \setminus B_\xi$, de modo que $\bigcup_\xi \{b_\xi\} \notin \mathscr{I}$. De fato, se tal conjunto pertencesse a $\mathscr{I}$, seria subconjunto de um elemento de $\mathscr{B}$, uma contradição com a construção de $\bigcup_\xi \{b_\xi\}$. $\square$

Analogamente ao que foi feito para os pequenos cardinais já introduzidos, provavelmente não será possível obter informações precisas sobre as cardinalidades associadas a um ideal. Ainda é possível, no entanto, demonstrar diversas relações entre elas; em particular, ZFC demonstra as desigualdades abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{cov}(\mathscr{L}) \arrow[dd] & \mathbf{non}(\mathscr{B}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathbf{cof}(\mathscr{B}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathbf{cof}(\mathscr{L}) \arrow[l] \arrow[dd] \\
 & \mathfrak{b} \arrow[d] & \mathfrak{d} \arrow[d] & \\
\mathbf{add}(\mathscr{L}) & \mathbf{add}(\mathscr{B}) \arrow[l] & \mathbf{cov}(\mathscr{B}) \arrow[l] & \mathbf{non}(\mathscr{L}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Teorema 5.1. *$\mathfrak{s} \leq \min\{\mathbf{non}(\mathscr{B}), \mathbf{non}(\mathscr{L})\}$ e $\mathfrak{r} \geq \max\{\mathbf{cov}(\mathscr{B}), \mathbf{cov}(\mathscr{L})\}$.*

6 Conexões de Galois-Tuckey

Como mencionado, diversos dos cardinais pequenos definidos aqui envolvem alguma forma de dualidade nos objetos envolvidos: seja em famílias dominantes de funções, ou famílias que não são dominadas; famílias divisoras de conjuntos, ou famílias indivisíveis. Isto se estende também para os pequenos cardinais associados a ideais, embora de maneira não inteiramente óbvia. Uma ferramente adequada para tratar dessas noções é formalizada na literatura pelas conexões de Galois–Tuckey, que aqui apenas introduzimos para um vislumbre da teoria que segue.

Uma tripla $\mathbf{A} = (A_-, A_+, A)$ consistindo de dois conjuntos A_- e A_+, e uma relação binária $A \subseteq A_- \times A_+$ será dita uma *relação.* A *relação dual* será a tripla $\mathbf{A}^\perp = (A_+, A_-, \neg A^\smile)$, onde $(x, y) \in \neg A^\smile \leftrightarrow (y, x) \notin A$. Dada uma relação $\mathbf{A}$, sua *norma* $\|\, \mathbf{A} \,\|$ é a menor cardinalidade de um subconjunto $Y \subseteq A_+$ tal que todo $x \in A_-$ está relacionado por A com pelo menos um

$y \in A_+$:

$$\| \mathbf{A} \| \coloneqq \min\{|Y| \colon Y \subseteq A_+,\ \forall x \in A_- \exists y \in Y(xAy)\}.$$

Tal noção de relação e suas definições auxiliares são bastante adequadas para contextualizar e simplificar os pequenos cardinais já definidos, assim como suas relações. A relação dual também permite trabalhar melhor a noção de dualidade intuída previamente.

Exemplo 3. Seja $\mathfrak{D}$ a relação $(\omega^\omega, \omega^\omega, <^*)$. Então tem-se que $\|\mathfrak{D}\| = \mathfrak{d}$. A relação dual é $\mathfrak{D}^\perp = (\omega^\omega, \omega^\omega, \not>^*)$, e tem-se $\|\mathfrak{D}^\perp\| = \mathfrak{b}$.

Exemplo 4. Seja $\mathfrak{R}$ a relação $(\mathscr{P}(\omega), [\omega]^\omega, \text{não divide})$. Tem-se que $\|\mathfrak{R}\| = \mathfrak{r}$, e a relação dual é $\mathfrak{R}^\perp = ([\omega]^\omega, \mathscr{P}(\omega), \text{é dividido por})$, e também $\|\mathfrak{R}^\perp\| = \mathfrak{s}$.

Exemplo 5. Dado um ideal $\mathscr{I}$ de subconjuntos de X, seja $\mathbf{Cov}(\mathscr{I})$ a relação $(X, \mathscr{I}, \in)$. Então teremos que $\| \mathbf{Cov}(\mathscr{I})\| = \mathbf{cov}(\mathscr{I})$; ainda mais, a relação dual será $\mathbf{Cov}(\mathscr{I})^\perp = (\mathscr{I}, X, \not\ni)$, de modo que $\| \mathbf{Cov}(\mathscr{I})^\perp\| = \mathbf{non}(\mathscr{I})$.

Exemplo 6. Dado um ideal $\mathscr{I}$ de subconjuntos de X, seja $\mathbf{Cof}(\mathscr{I})$ a relação $(\mathscr{I}, \mathscr{I}, \subseteq)$. Então temos que $\| \mathbf{Cof}(\mathscr{I})\| = \mathbf{cof}(\mathscr{I})$, e a relação dual é $\mathbf{Cof}(\mathscr{I})^\perp = (\mathscr{I}, \mathscr{I}, \not\supseteq)$. Note que sua norma é a menor cardinalidade de uma família $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{I}$ tal que, para todo $A \in \mathscr{I}$, existe $B \in \mathscr{F}$ tal que $B \not\subseteq A$. Mas então $\bigcup \mathscr{F} \notin \mathscr{I}$, pois caso contrário, todo $B \in \mathscr{F}$ seria tal que $B \subseteq \bigcup \mathscr{F}$. Reciprocamente, se $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{I}$ é família tal que $\bigcup \mathscr{F} \notin \mathscr{I}$, e se existisse $A \in \mathscr{I}$ tal que para todo $B \in \mathscr{F}$ tenha-se $B \subseteq A$, então $\bigcup \mathscr{F} \subseteq A$ e então $\bigcup \mathscr{F} \in \mathscr{I}$, uma contradição. Assim, de fato $\| \mathbf{Cof}(\mathscr{I})^\perp\| = \mathbf{add}(\mathscr{I})$.

Dadas duas relações $\mathbf{A} = (A_-, A_+, A)$ e $\mathbf{B} = (B_-, B_+, B)$, um *morfismo* de $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$ é um par de funções $\varphi = (\varphi_-, \varphi_+)$ tais que

- $\varphi_- : B_- \to A_-$,
- $\varphi_+ : A_+ \to B_+$,
- Para todo $b \in B_-$ e $a \in A_+$, se $\varphi_-(b)Aa$, então $bB\varphi_+(a)$.

Nota-se que se $\varphi = (\varphi_-, \varphi_+)$ é morfismo de $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$, então $\varphi^\perp = (\varphi_-, \varphi_+)$ é morfismo de $\mathbf{B}^\perp$ para $\mathbf{A}^\perp$.

A ideia de morfismos entre relações, tornando-as parte de uma categoria, é algo implícito em diversas das demonstrações feitas sobre comparações de pequenos cardinais, devido ao seguinte fato:

Teorema 6.1. *Se existe um morfismo $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, então $\| \mathbf{A} \| \geq \| \mathbf{B} \|$ e $\|A^\perp\| \leq \| \mathbf{B}^\perp \|$.*

Demonstração. Seja $Y \subseteq A_+$ subconjunto tal que, para todo $a \in A_-$, exista $y \in Y$ tal que aAy. Então $\varphi(Y) = Z \subseteq B_+$ tem cardinalidade menor ou igual a $\| \mathbf{A} \|$. Verifica-se que, para todo $b \in B_-$, existe $z \in Z$ tal que bBz; de fato, $\varphi_-(b) \in A_-$, de modo que existe $y \in Y$ tal que $\varphi_-(b)Ay$. Desta maneira, pelas condições de morfismo, $bB\varphi_+(y)$, e a condição é satisfeita. A implicação dual é consequência do morfismo $\varphi^\perp$. $\square$

Dentre todas as utilizações implícitas de morfismos nas demonstrações feitas, uma prontamente identificável é de $\mathbf{Cof}(\mathscr{I})$ para $\mathbf{Cov}(\mathscr{I})$, cujo morfismo é o par (S, id), onde $S : x \mapsto \{x\}$. A teoria iniciada por estas relações e morfismos, historicamente denominados de conexões de Galois–Tuckey, é extensa e importante. Ela possui ainda mais emanações para outros pequenos cardinais discutidos na teoria, assim como oferece as ferramentas necessárias para tratar dos teoremas aqui apenas enunciados.

7 Relações entre cardinais

Além dos números apresentados nesse texto, existem outros pequenos cardinais importantes mas suas construções dependem de outros resultados dentro de tópicos como, por exemplo, *Teoria de Ramsey*.

Nessa seção vamos apresentar outros exemplos para, pelo menos, enunciarmos alguns resultados de consistência com ZFC. Temos interesse em saber, partindo dessas construções, quais afirmações podem ser deduzidas somente com essa axiomática. Essa busca deixa bastante evidente a beleza da teoria, como exemplo, temos uma relação entre os cardinais que podemos tanto afirmar como negar em ZFC.

Primeiro, algumas definições:

Definição 7.1 (Cofinalidade de um cardinal)**.** Seja κ um cardinal, sua *cofinalidade*, denotada por $\mathrm{cf}(\kappa)$, é menor cardinalidade das famílias de conjuntos de cardinalidade menor que κ cuja união disjunta seja conjunto com essa cardinalidade.

Definição 7.2 (Cardinal regular e singular)**.** Seja κ um número cardinal,

- κ é dito *regular* quando $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$
- κ é dito *singular* quando $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$

Avançando um pouco mais, vamos "batizar" alguns cardinais, já que explorar suas construções demandaria de um espaço e tempo que excedem o escopo do trabalho:

1. $\mathfrak{p}$: Número de pseudo-interseção. Definimos uma noção de conjuntos estarem quase contidos um no outro (o número de elementos fora do conjunto é finito) e estudamos famílias com propriedade de interseção relacionada a essa ordem.

2. $\mathfrak{h}$: *Shattering* number. Construído a partir de relações sobre interseções infinitas de pares de conjuntos.

3. $\mathfrak{par}$ e $\mathfrak{hom}$: Número de Partição e Número de Homogeneidade, respectivamente. Ambas surgem de construções na Teoria de Ramsey para colorações.

4. $\mathfrak{a}$: "Almost Disjoint Number". Construído a partir da relação de ser quase disjunto: dada uma família a interseção dois a dois é finita.

5. $\mathfrak{i}$: Número de Independência. Surge de relação para famílias de conjuntos tal que tanto o conjunto quanto seu complemento são finitos.

6. $\mathfrak{t}$: *Towering* Number. Famílias que são torres de conjuntos.

Vamos enunciar alguns teoremas somente para exibir certas relações consistentes com ZFC; as demonstrações são bastante extensas, por isso serão omitidas:

Teorema 7.1. *Sejam κ e λ cardinais regulares com $\omega_1 \leq \kappa \leq \lambda$. É consistente com ZFC que $\mathfrak{c} = \lambda$ e $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{s} = \mathfrak{t} = \mathfrak{p} = \mathfrak{k}$.*

Teorema 7.2. *São consistentes com ZFC:*

1. $\mathfrak{d} < \mathfrak{r}$

2. $\mathfrak{d} > \mathfrak{r}$

3. $\mathfrak{a} < \mathfrak{d}$ *(portanto,* $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ *já que* $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$)

4. $\mathfrak{b} < \mathfrak{t}$

5. $\mathfrak{s} > \mathfrak{t}$

Mesmo que exista um certa liberdade nas propriedades de ordenação, algumas são "fixadas", ou seja, são diretamente deduzíveis a partir de ZFC. Isso é ilustrado no grafo na figura 3, se existe aresta conectando cardinais α e β em alturas diferentes (considerando o sentido crescente como de baixo para cima) então $\alpha \leq \beta$ quando β esta acima de α.

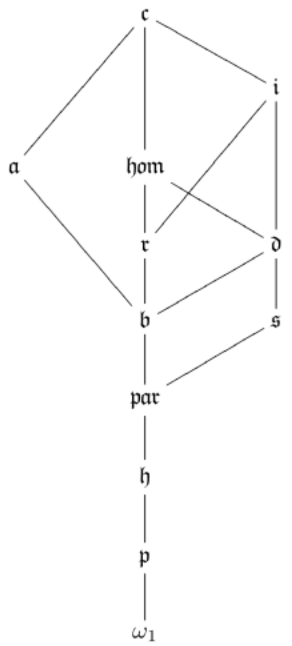


Figura 3: Grafo ilustrando relações entre os cardinais.

8 Concluindo

No texto, construímos noções bem introdutórias de pequenos ordinais onde, a partir das construções, não é difícil notar que é um conceito com potencial de bastante utilidade em outras áreas da matemática. Como exemplo, em Van Douwen [3] ele explora propriedades topológicas dos inteiros trabalhando com as implicações desses cardinais, desde propriedades de compacidade até propriedades envolvendo teoria da medida.

Além disso, é uma área bastante ativa com resultados recentes importantes. Por exemplo, Malliaris e Shelah conectam e resolvem dois problemas que envolvem essa área, mostrando que os cardinais $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{t}$ possuem relação muito mais profunda que o imaginado. Como sugestão, um bom texto para entender o valor dessa demonstração é o artigo referido em [4].

Referências

[1] Halbeisen - *Combinatorial Set Theory - With a Gentle Introduction to Forcing*, Springer-Verlag London, 2012.

[2] Kanamori, Foreman - *Handbook of Set Theory*, Springer 2010

[3] Van Douwen - *The Integers and Topology*, Handbook of Set-Theoric Topology Cap.3, Elsevier, 1984

[4] Kevin, H. - *Mathematicians Measure Infinities and Find They're Equal* visto em https://www.quantamagazine.org/mathematicians-measure-infinities-find-theyre-equal-20170912/ consultado em 25/07/2021.