A Geometria das Superfícies de Riemann

André Hisatsuga Diogo Ramos Eduardo Sodré

IME-USP

7 de dezembro de 2021

Introdução

Este seminário se divide basicamente em 5 partes, que consistem em

- revisões e definições iniciais;
- classificação das superfícies de Riemann simplesmente conexas;
- tipos de superfícies a partir dessas classificações;
- falar dessas geometrias, o que nos leva às métricas conformes;
- o primeiro foco do nosso trabalho, falar que toda superfície de Riemann complexa tem métrica conforme de curvatura gaussiana constante;
- o segundo foco do nosso trabalho, que é o Teorema de Pick.

Revisão Breve de Análise Complexa

$V \subseteq \mathbb{C}$ aberto, $f : V \to \mathbb{C}$ é *holomorfa* (*complexa analítica*) se existe

$$\lim_{z \to {}_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \ \forall z_0 \in V.$$

Da teoria de análise complexa: se $f : V \to \mathbb{C}$ é: holomorfa, então é

- infinitamente diferenciável;
- função aberta;
- localmente série de potências.

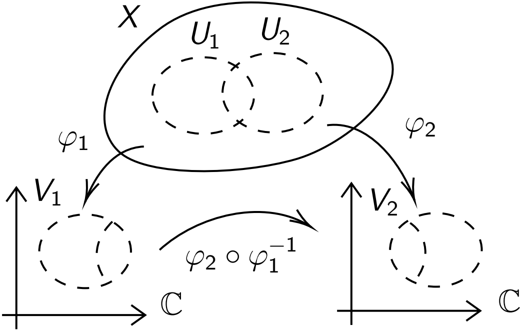
Se $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in V$, então a função é dita *conforme*.

Se a inversa for holomorfa, então a função é dita *biholomorfa*.

Definições Iniciais

Seja X uma variedade topológica de dimensão 2. Uma *Carta complexa* é um par (φ, U), em que φ é o homeomorfismo $\varphi : U \subseteq X \to V \subseteq \mathbb{C}$, e U e V são abertos.

Cartas compatíveis = transição $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ entre cartas é (bi)holomorfa:



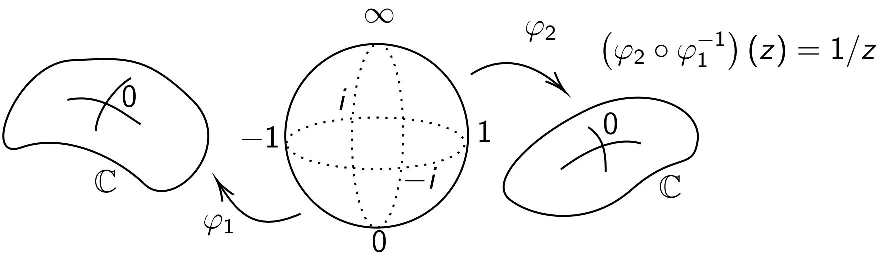
Definições Iniciais

Um *atlas* é a coleção $\mathfrak{U} = \{(\varphi_i, U_i)\}$ de cartas compatíveis que cobrem X.

Chamamos de *estrutura complexa* a dupla (X, Σ) em que temos X com um atlas maximal Σ. Se Σ for implícito, diz-se que X é uma **superfície de Riemann**.

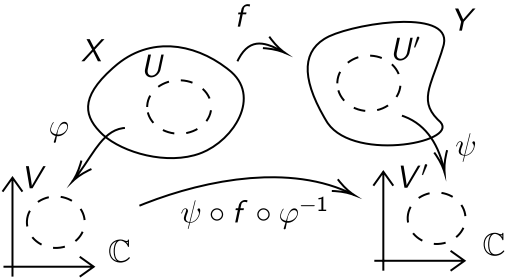
Ex.: $\mathbb{C}$ com atlas $\{\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$, e abertos $V \subseteq \mathbb{C}$.

Ex.: A *esfera de Riemann* $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \mathbb{P}^1 = \widehat{\mathbb{C}}$:



Definições Iniciais

Dizemos que $f : X \to Y$ é um *mapa holomorfo* entre superfícies de Riemann se a representação coordenada $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ for holomorfa:



Se for um mapa holomorfo com inversa holomorfa, o chamamos de *biholomorfismo*. Nesse caso, X e Y são *(conformemente) isomorfas*.

Se $Y = X$, $f : X \to X$ é um *automorfismo conforme*, de grupo $\mathrm{Aut}(X)$.

Definições Iniciais

OBS.: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ é difeomorfo a $\mathbb{C}$ como superfícies reais, mas **não** são isomorfos como superfícies de Riemann. Isso é uma consequência do seguinte teorema, que chamamos de Teorema de Liouville:

Teorema (Liouville)

Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa limitada, então f é constante.

Duas perguntas:

- Como são todas as superfícies de Riemann (a menos de isomorfismo)?
- Quais propriedades ou estruturas (geométricas) elas têm?

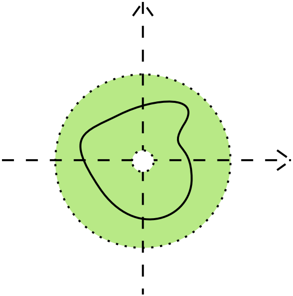
Toda superfície de Riemann é uma superfície abstrata, então faz sentido perguntar da geometria.

O Teorema de Uniformização

Um espaço topológico B é *simplesmente conexo* se toda curva em B pode ser deformada continuamente em um ponto. (Noção de deformação homotópica)

A presença de curvas que não podem ser deformadas num ponto nos diz que existem de "buracos" nesse espaço.

$\mathbb{D}$ e $\widehat{\mathbb{C}}$ são simplesmente conexos, mas $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ não.



O Teorema de Uniformização

Sabemos classificar todas as superfícies de Riemann simplesmente conexas!

Teorema de Uniformização de Riemann

Toda superfície de Riemann S simplesmente conexa é biholomorfa a exatamente uma das superfícies abaixo:

- O plano complexo $\mathbb{C}$;
- O disco aberto $\mathbb{D}$;
- A esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Mas como saber para as não simplesmente conexas?

Utilizamos as ideias de recobrimentos e ações de grupos.

O Teorema da Uniformização

O Teorema de Uniformização de Riemann

Toda superfície de Riemann S é isomorfa a $\widetilde{S}/\Gamma$, onde $\widetilde{S}$ é uma superfície de Riemann simplesmente conexa, e $\Gamma \cong \pi_1(S) \subseteq \mathrm{Aut}(\widetilde{S})$ é grupo com ação livre e propriamente descontínua em $\widetilde{S}$.

$\widetilde{S}$ é o **recobrimento universal** de S.

Ação livre: $g \neq \mathrm{id} \implies g$ não tem pontos fixos.

Ação propriamente descontínua: se $K \subseteq S$ é compacto, existem apenas finitos $g \in \Gamma$ com $g(K) \cap K \neq \emptyset$.

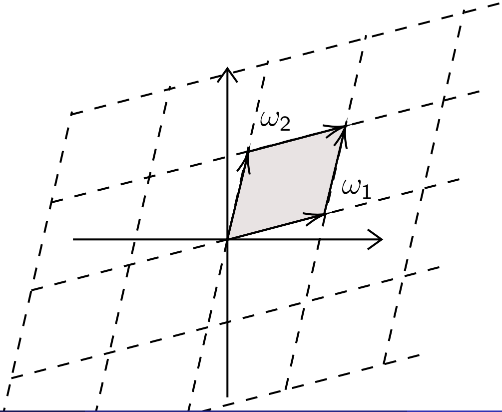
O quociente $\widetilde{S}/\Gamma$ é o espaço de órbitas da ação.

O Teorema da Uniformização

Ex.: O toro T^2. Dado um reticulado Λ em $\mathbb{C}$, gerado por ω_1 e ω_2, pensamos no grupo gerado pelas translações

$$z \mapsto z + \omega_1, \quad z \mapsto z + \omega_2.$$

O quociente pelas órbitas é o toro! $T^2 \cong \mathbb{C}/\Lambda$.

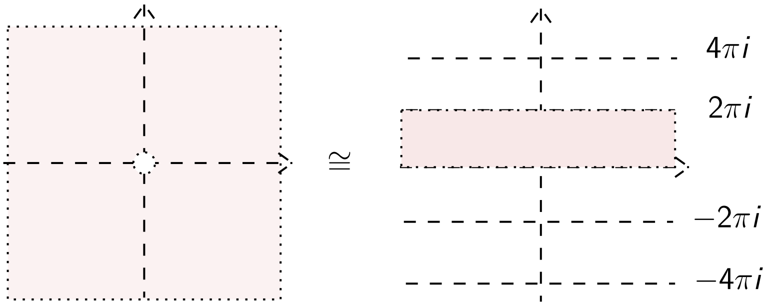


O Teorema da Uniformização

Ex.: O plano furado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Temos o recobrimento $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e o grupo Γ das translações

$$z \mapsto z + 2\pi i n$$

agindo em $\mathbb{C}$. Obtém que $\mathbb{C} \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}$.



Os Tipos de Superfícies

Dividimos as superfícies de Riemann em 3 classes:

- As **esféricas**, recobertas por $\widehat{\mathbb{C}}$;
- As **euclidianas**, recobertas por $\mathbb{C}$;
- As **hiperbólicas**, recobertas por $\mathbb{D}$.

Achar S vira uma questão algébrica de achar $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(\widetilde{S})$ com ação livre e propriamente descontínua!

Sabemos os automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$. Por exemplo, os de $\mathbb{D}$ são

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

com $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$. (Fatores de Blaschke)

Sabemos então as superfícies de Riemann:

- **Esféricas:** apenas $\widehat{\mathbb{C}}$.
- **Euclidianas:** $\mathbb{C}$, cilindros $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, e toros $\mathbb{C}/\Lambda \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$.
- **Hiperbólicas:** todas as outras!

Faz sentido falarmos da geometria delas?

Já “sabemos” a geometria do plano $\mathbb{C}$ e da esfera $\mathbb{C}$. Temos ideia do cilindro, toro, etc.

Queremos uma geometria que seja coerente com a estrutura complexa: *métricas conformes*.

Métricas Conformes

Uma *métrica riemanniana* em um aberto de $\mathbb{C}$ é da forma

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2.$$

É dita *conforme* se $g_{11} = g_{22}$ e $g_{12} = 0$. Assim, com $z = x + yi$, $ds^2 = \varphi(x + yi)^2(dx^2 + dy^2)$, ou $ds = \varphi(z)|dz|$ para $\varphi(z)$ uma função suave e estritamente positiva.

Essa métrica é *invariante* por um automorfismo conforme $w = f(z)$ $\iff$ satisfizer $\varphi(f(z)) = \varphi(z)/|f'(z)|$. Ou seja, f é isometria.

Possível calcular *curvatura gaussiana* pela fórmula

$$K = \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - \varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})}{\varphi^4}.$$

Quais são métricas conformes “naturais” em $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{D}$?

Métricas Conformes

Métrica conforme no plano $\mathbb{C}$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dz\overline{dz} \implies ds = |dz|,$$

é a usual, curvatura gaussiana constante $K \equiv 0$.

Métrica conforme na esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$: identifica com $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sob projeção estereográfica,

$$ds = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}.$$

Métrica esférica: curvatura constante $K \equiv 1$.

Se comporta bem em vizinhança de ∞; $z \mapsto 1/z$ é isometria.

Métricas Conformes

Métrica conforme em $\mathbb{D}$: é a *métrica de Poincaré*

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Com $\mathbb{D}$ biholomorfo a $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, é a métrica no semiplano superior

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) \implies ds = \frac{1}{y}|dz|$$

de curvatura constante $K \equiv -1$.

Dadas as métricas em $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{D}$, como obter métricas nas superfícies de Riemann S que eles recobrem?

É possível se o grupo Γ age em $\widetilde{S}$ por isometrias!

Métricas Conformes e Ações por Isometrias

Para $\widehat{\mathbb{C}}$; única superfície esférica é o próprio $\widehat{\mathbb{C}}$.

Para $\mathbb{C}$: únicos automorfismos conformes que são isometrias são as translações $z \mapsto z + \omega$. Então temos métricas conformes em $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ e $\mathbb{C}/\Lambda$ com

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$$

isometrias locais, e curvatura $K \equiv 0$.

E para $\mathbb{D}$?

Teorema

A métrica de Poincaré em $\mathbb{D}$ é a única tal que todos os automorfismos conformes de $\mathbb{D}$ são isometrias da métrica.

Métricas Conformes e Ações por Isometrias

Com métrica em $\widetilde{S} = \mathbb{D}$, e Γ agindo em $\widetilde{S}$ por isometrias, temos a *métrica de Poincaré* em $S = \widetilde{S}/\Gamma$ com

$$\mathbb{D} = \widetilde{S} \longrightarrow \widetilde{S}/\Gamma = S$$

é isometria local. Vai ser conforme e curvatura $K \equiv -1$.

Teorema

Toda superfície de Riemann admite métrica conforme de curvatura constante que é positiva, nula ou negativa dependendo de a superfície ser esférica, euclidiana ou hiperbólica.

Na verdade, vai valer que a métrica é completa!

O Teorema de Pick

Como são as funções holomorfas entre superfícies hiperbólicas?

Teorema (Pick)

Sejam X, Y superfícies de Riemann hiperbólicas, e $f : X \to Y$ mapa holomorfo. Então vale apenas uma das três afirmações abaixo:

- *f é isomorfismo conforme de X em Y, e é isometria entre as métricas de Poincaré correspondentes.*
- *f é recobrimento, mas não 1 para 1. Neste caso, f é isometria local, mas não global, e $d_Y(f(p), f(q)) \leq d_X(p, q)$.*
- *f decresce distâncias não-nulas estritamente. Mais especificamente, para todo $K \subseteq X$ compacto, existe constante $0 < c_K < 1$ tal que, para $p, q \in K$,*

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq c_K d_X(p, q).$$

O Teorema de Pick

Ex.: $f(z) = z^2$ contrai distâncias em $\mathbb{D}$, mas é isometria local em $\mathbb{D} \setminus \{0\}$!

Utiliza o lema de Schwarz de análise complexa:

Lema (Schwarz)

Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ função holomorfa tal que $f(0) = 0$. Então $|f'(0)| \leq 1$, e para todo $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$.
Ainda mais, f é automorfismo conforme se e somente se $|f'(0)| = 1$, ou para algum $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| = |z|$. Neste caso, f é rotação $z \mapsto \lambda z$ com $\lambda \in S^1$.

O Teorema de Pick

Demonstração do teorema: T_pS espaço vetorial complexo 1-dimensional; métrica de Poincaré induz norma $\|v\|$ em T_pS.

Norma de $df_p : T_pS \to T_{f(p)}S'$:

$$\|df_p\| = \frac{\|df_p(v)\|}{\|v\|}$$

independe de $0 \neq v \in T_pS$. Lema de Schwarz: se $S = \mathbb{D}$ e $f(0) = 0$, então $\|df_0\| \leq 1$, e igual a 1 se e só se automorfismo conforme.

Com S e S' hiperbólicas simplesmente conexas e $p \in S$, $\|df_p\| \leq 1$, e é igual a 1 se e só se f isomorfismo conforme.

O Teorema de Pick

Com S e S' hiperbólicas, escolhe um *lift* $F : \widetilde{S} \to \widetilde{S}'$ de f para os recobrimentos universais:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} & \xrightarrow{F} & \widetilde{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{f} & S' \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} T_{\widetilde{p}}\widetilde{S} & \xrightarrow{dF_p} & T_{F(\widetilde{p})}\widetilde{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_pS & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)}S' \end{array}$$

Mapas verticais são recobrimentos e isometrias locais, então mostra que $\|df_p\| = 1 \iff f$ é recobrimento.

O Teorema de Pick

Se f não é recobrimento, $\|df_p\| < 1$. Com $K \subseteq S$ compacto, tome $K' \supseteq K$ onde, para $p, q \in K$, existe geodésica entre p, q de comprimento $d_S(p, q)$ em K'. $\|df_p\|$ assume máximo $c_K < 1$ em K'.

Com $\gamma : I \to K'$ curva,

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \int_I \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_I \|df_p(\gamma'(t))\| dt \\ &\leq \int_I \|c_K \gamma'(t)\| dt = c_K \int_I \|\gamma'(t)\| dt = c_K L(\gamma). \end{aligned}$$

Resultado para distâncias segue da definição

$$d_S(p, q) = \inf_{\gamma(0)=p, \gamma(1)=q} L(\gamma).$$

$\square$

O Teorema de Pick

Corolário interessante: $\iota : S \to S'$ a inclusão, $S \neq S'$, e $p \neq q \in S$. Então

$$d_{S'}(p, q) < d_S(p, q).$$

Ou seja, distâncias medidas com respeito a superfícies hiperbólicas maiores são sempre menores!

Referências

[1] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. 1ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 1981.

[2] John Milnor. *Dynamics in One Complex variable*. 3ª ed. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2006.