A Métrica de Sasaki e Fluxo Geodésico

Eduardo Ventilari Sodré

2022

Seja M uma variedade suave n-dimensional e TM seu fibrado tangente, ou seja,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

a união disjunta dos espaços tangentes de M. É naturalmente um fibrado vetorial e variedade suave $2n$-dimensional, com $\pi : TM \to M$ a projeção dos vetores em seus pontos base sendo uma submersão sobrejetora, de fibras T_pM. Se $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ é uma carta coordenada local em M, então sabemos que

$$(\pi^{-1}(U), (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n))$$

é carta coordenada de TM ao redor de $(p, v) \in TM$. Podemos considerar, para $(p, v) \in TM$, o núcleo do diferencial $d\pi_{(p,v)} : T_{(p,v)}TM \to T_pM$. O núcleo, denotado por $\mathcal{V}_{(p,v)}M$, é subespaço vetorial de dimensão n, dito o subespaço dos *vetores verticais* em $(p, v) \in TM$. A união destes subespaços define uma distribuição em TM, a distribuição vertical $\mathcal{V}M$. Dado $p \in M$ e considerando a inclusão canônica $\iota_p : T_pM \to TM$ como um mergulho suave, ainda obtemos a aplicação linear injetora

$$d(\iota_p)_v : T_v(T_pM) \cong T_pM \to T_{(p,v)}TM,$$

onde, como T_pM é espaço euclidiano, pode-se identificar o espaço tangente em cada um de seus pontos como ele próprio canonicamente. Mas como $\pi \circ \iota \equiv p$ é constante, temos que $d(\iota_p)_v$ é um isomorfismo linear canônico entre T_pM e $\mathcal{V}_{(p,v)}M$.

Apenas com as informações dadas, não há uma maneira canônica de definir uma distribuição horizontal a $\mathcal{V}M$, ou seja, uma escolha de subespaços complementares $\mathcal{H}_{(p,v)}M \subset T_{(p,v)}TM$ aos $\mathcal{V}_{(p,v)}M$ tais que

$$d\pi_{(p,v)}\big|_{H_{(p,v)}M} : H_{(p,v)}M \to T_pM$$

seja isomorfismo. Mas isto pode ser obtido ao considerar M uma variedade riemanniana dada por uma métrica g, ou mais fracamente, uma conexão afim em M.

Fixada uma conexão afim ∇ em M, consideramos as curvas suaves $(\gamma, X) : I \to TM$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é intervalo contendo vizinhança do 0, e geometricamente interpretamos X como um campo vetorial ao longo de uma curva $\gamma = \pi \circ X$. Com $(\gamma(0), X(0) = (p, v)$, a velocidade da curva (γ, X) em $t = 0$ é um vetor em $T_{(p,v)}TM$, e sabemos que sua projeção por $d\pi_{(p,v)}$ é $\gamma'(0) = w$:

$$\pi \circ X = \gamma \implies d\pi_{(p,v)}(X'(0)) = \gamma'(0) = w.$$

Dizemos que o vetor $X'(0)$ é *horizontal* quando X é campo paralelo ao longo de γ, ou seja, vetores horizontais são as velocidades de curvas em TM dadas por campos paralelos. Naturalmente formam subespaço vetorial $\mathcal{H}_{(p,v)}M \subset T_{(p,v)}TM$, e devido à existência e unicidade de campos paralelos dadas condições inciais, se temos $v, w \in T_pM$, existe um único vetor horizontal em $T_{(p,v)}TM$ cuja projeção em T_pM por $d\pi_{(p,v)}$ é igual a w.

Como $d\pi^{-1}_{(p,v)}(0) = \ker d\pi_{(p,v)} = \mathcal{V}_{(p,v)}M$, isto implica que $\mathcal{V}_{(p,v)}M \cap \mathcal{H}_{(p,v)}M$ consiste apenas do vetor nulo, e também que a dimensão de $\mathcal{H}_{(p,v)}M$ é n. Assim,

$$T_{(p,v)}TM = \mathcal{V}_{(p,v)}M \oplus \mathcal{H}_{(p,v)}M,$$

e $d\pi_{(p,v)}\big|_{\mathcal{H}_{(p,v)}M} : \mathcal{H}_{(p,v)}M \to T_pM$ é isomorfismo linear.

Consideram-se coordenadas locais (x^i, y^i) para TM ao redor de (p, v), e coordenadas dos vetores em $T_{(p,v)}TM$ sendo $(a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^n)$, ou seja, para $\xi \in T_{(p,v)}TM$,

$$\xi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

A inclusão $\iota_p : T_pM \to TM$ é representada então por

$$(y^1, \ldots, y^n) \longmapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p), y^1, \ldots, y^n),$$

e seu diferencial $d(\iota_p)_v : T_vT_pM \cong T_pM \to T_{(p,v)}TM$ é

$$\sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial y^i} \mapsto \sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial y^i} = (0, \ldots, 0, w^1, \ldots, w^n),$$

sendo o isomorfismo linear canônico entre T_pM e $\mathcal{V}_{(p,v)}M$. Ainda mais, a projeção $\pi : TM \to M$, dada por

$$(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) \longmapsto (x^1, \ldots, x^n),$$

tem diferencial $d\pi_{(p,v)} : T_{(p,v)}TM \to T_pM$

$$(a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^n) \longmapsto (a^1, \ldots, a^n).$$

Desta maneira, ξ é vertical se e somente se $a^i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, ou seja, se é da forma

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Se $X : I \to TM$ é campo vetorial ao longo de uma curva, com coordenadas

$$X(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t), X^1(t), \ldots, X^n(t))$$

e

$$X'(0) = ((\gamma^1)'(0), \ldots, (\gamma^n)'(0), (X^1)'(0), \ldots, (X^n)'(0)),$$

sua condição de paralelismo equivale a

$$0 = (X^i)' + \Gamma^i_{jk}(\gamma^j)'X^k,\ \forall i.$$

Desta maneira, o vetor ξ será horizontal se e somente se

$$0 = b^i + \Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)a^j y^k,\ \forall i,$$

ou seja, se é da forma

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} (-\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)a^j y^k) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

e o isomorfismo $T_pM \to \mathcal{H}_{(p,v)}M$ tem a forma

$$\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,j,k} \Gamma^i_{jk} a^j y^k \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Verifica-se que os vetores horizontais formam um subfibrado $\mathcal{H}M$ complementar a $\mathcal{V}M$, com $TTM = \mathcal{V}M \oplus \mathcal{H}M$.

Mais fortemente, se M é munida de uma métrica g, é possível construir uma métrica canônica g_T em TM a partir de como ela atua nos vetores verticais e horizontais. Se $\xi, \xi' \in T_{(p,v)}TM$ são ambos verticais, então seu produto escalar é o produto escalar dos vetores correspondentes em (T_pM, g_x) a partir do isomorfismo $d(\iota_p)_v : T_vT_pM \cong T_pM \to \mathcal{V}_{(p,v)}M$. Se por outro lado $\xi, \xi \in T_{(p,v)}TM$ são ambos horizontais, então seu produto escalar é definido como o produto escalar de suas projeções por $d\pi_{(p,v)}$, sendo isomorfismo entre

$\mathcal{H}_{(p,v)}M$ e T_pM. Por fim, estipula-se que vetores horizontais e verticais são ortogonais.

Afirma-se que a métrica g_T assim definida em TM é suave. Em $\mathcal{V}_{(p,v)}M$ a métrica é o pullback por $(d(\iota_p)_v)^{-1}$, de modo que a componente vertical é

$$g_T^v = g_{ij}dy^i dy^j,$$

e a componente horizontal pode ser calculada a partir da isometria entre $\mathcal{H}_{(p,v)}M$ e T_pM como descrita. Fixado j, considere o vetor

$$z_j = \frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma^i_{jk} y^k \frac{\partial}{\partial y^i},$$

a imagem de $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in T_pM$ com 1 na j-ésima posição pelo isomorfismo horizontal. Então, para j_1, j_2, vale

$$\begin{cases} g_T(z_{j_1}, z_{j_2}) & = g_{j_1 j_2}, \\ g_T\left(\dfrac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial y^{j_2}}\right) & = g_{j_1 j_2}, \\ g_T\left(z_{j_1}, \dfrac{\partial}{\partial y^{j_2}}\right) & = 0, \end{cases}$$

e temos $\frac{\partial}{\partial x^j} = z_j + \Gamma^i_{jk} y^k \frac{\partial}{\partial y^i}$. A partir destas relações, deduz-se

$$\begin{cases} g_T\left(\dfrac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial y^{j_2}}\right) = \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} g_{i_1 j_2}, \\ g_T\left(\dfrac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x^{j_2}}\right) = g_{j_1 j_2} + \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} \Gamma^{i_2}_{j_2 k_2} y^{k_2} g_{i_1 i_2}, \end{cases}$$

e então

$$\begin{aligned} g_T =& (g_{j_1 j_2} + \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} \Gamma^{i_2}_{j_2 k_2} y^{k_2} g_{i_1 i_2}) dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} + (\Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} g_{i_1 i_2}) dx^{j_1} \otimes dy^{i_2} \\ &+ (\Gamma^{i_2}_{j_2 k_2} y^{k_2} g_{i_1 i_2}) dy^{i_1} \otimes dx^{j_2} + g_{j_1 j_2} dy^{j_1} \otimes dy^{j_2} \\ &= g_{i_1 i_2} dx^{i_1} dx^{i_2} + g_{i_1 i_2} \left(\Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} dy^{i_2} dx^{j_1} + \Gamma^{i_2}_{j_2 k_2} y^{k_2} dy^{i_1} dx^{j_2} + dy^{i_1} dy^{i_2}\right) \\ =& g_{i_1 i_2} dx^{i_1} dx^{i_2} + g_{i_1 i_2} \left(dy^{i_1} + \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} dx^{j_1}\right) \left(dy^{i_2} + \Gamma^{i_2}_{j_2 k_2} y^{k_2} dx^{j_2}\right), \end{aligned}$$

reordenando os índices e operando os tensores. Sucintamente, temos que

$$\begin{aligned} g_T &= g_{i_1 i_2} dx^{i_1} dx^{i_2} + g_{i_1 i_2} \left(dy^{i_1} + \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} dx^{j_1}\right) \left(dy^{i_2} + \Gamma^{i_2}_{j_2 k_2} y^{k_2} dx^{j_2}\right) \\ &= g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} \frac{\nabla}{dt} y^i \frac{\nabla}{dt} y^j, \end{aligned}$$

onde $\frac{\nabla}{dt}y^i$ representa a derivada covariante por

$$\frac{\nabla}{dt}y^i = dy^i + \Gamma^i_{jk}y^k dx^j.$$

Note que o subespaço vertical é aquele anulado pelos dx^i, e o subespaço horizontal é anulado pelos $\frac{\nabla}{dt}y^i$. Naturalmente, todos os coeficientes são suaves em (p, v), e a métrica assim induzida é tal que $\pi : TM \to M$ é submersão riemanniana.

Definimos agora o que é o fluxo geodésico em (TM, g_T). Tem-se uma $\mathbb{R}$-ação local no fibrado tangente TM dada por

$$G_t(p, v) = (\exp_p(tv), \frac{d}{dt}\exp_p(tv)) = (\gamma_v(t), \gamma_v'(t)),$$

onde γ_v é a geodésica em M de condições iniciais $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$. Nas coordenadas canônicas e para t pequeno, temos que

$$G_t(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = (\gamma_v^1(t), \ldots, \gamma_v^n(t), (\gamma_v^1)'(t), \ldots, (\gamma_v^n)'(t)),$$

sendo realmente suave. Como para t, s pequenos valem a lei de composição de fluxos $G_t \circ G_s = G_{t+s}$, é de fato um fluxo local suave em TM. Tal fluxo é dito o *fluxo geodésico* em TM. O seu gerador infinitesimal, dito o *spray geodésico*, é obtido derivando G_t em $t = 0$, com

$$\begin{aligned} G_{(p,v)} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} G_t(p, v) = ((\gamma_v^1)'(0), \ldots, (\gamma_v^n)'(0), (\gamma_v^1)''(0), \ldots, (\gamma_v^n)''(0)) \\ &= (y^1, \ldots, y^n, -\Gamma^1_{jk}(x^1, \ldots, x^n)y^j y^k, \ldots, -\Gamma^n_{jk}(x^1, \ldots, x^n)y^j y^k). \end{aligned}$$

Note que, como $\|\gamma_v'(t)\|$ é constante, o fluxo geodésico preserva o fibrado unitário UTM, consistindo dos $(p, v) \in TM$ com $\|v\| = 1$. Assim, o spray geodésico é tangente a UTM como subvariedade propriamente mergulhada.

Se M é orientada (e portanto TM também) e G é o spray geodésico, desejamos mostrar que seu divergente é nulo, o que ocorre se e somente se geodésico preserva o volume riemanniano vol_{TM} de TM:

$$\mathcal{L}_G \mathrm{vol}_{TM} = (\mathrm{div} G) \mathrm{vol}_{TM}.$$

Numa variedade riemanniana orientada N, dadas coordenadas locais positivamente orientadas $(x^1, \ldots, x^n)$, podemos calcular o divergente de um campo V nessas coordenadas: Com a fórmula mágica de Cartan $\mathcal{L}_V = d \circ \iota_V + \iota_V \circ d$, temos $\mathcal{L}_V \mathrm{vol}_N = d(\iota_V \mathrm{vol}_N)$, e sabemos que

$$\begin{aligned} \iota_V \mathrm{vol}_N &= \iota_V(\sqrt{|g|}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) \\ &= \sqrt{|g|}\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} V^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Tomando a derivada exterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
& d(\sqrt{|g|}) \wedge \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} V^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \\
& \quad + \sqrt{|g|} d \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} V^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} V^i d(\sqrt{|g|}) \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \\
& \quad + \sqrt{|g|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} dV^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial(\sqrt{|g|})}{\partial x^i} + \sqrt{|g|} \frac{\partial V^i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \frac{V^i}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|})}{\partial x^i} \right) \mathrm{vol}_N
\end{aligned}
$$

e portanto, nessas coordenadas locais,

$$
\mathrm{div} V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \frac{V^i}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|})}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(V^i \sqrt{|g|})}{\partial x^i}.
$$

Nas coordenadas locais para TM, assumindo serem positivamente orientadas, temos

$$
\mathrm{div} G = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G^i}{\partial x^i} + \frac{\partial G^{n+i}}{\partial y^n} + \frac{G^i}{\sqrt{|g_T|}} \frac{\partial(\sqrt{|g_T|})}{\partial x^i} + \frac{G^{n+i}}{\sqrt{|g_T|}} \frac{\partial(\sqrt{|g_T|})}{\partial y^i},
$$

onde $|g_T| = \det((g_T)_{ij})$. Supomos então $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas normais em M centradas em p, de modo que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $\Gamma^i_{jk}(p) = 0$ e $\partial_i g_{jk}(p) = 0$. Também nessas coordenadas,

$$
G_{(p,v)} = (y^1, \ldots, y^n, 0, \ldots, 0),
$$

e a matriz $g_T = ((g_T)_{ij})$ é dada da seguinte forma:

$$
g_T = ((g_T)_{ij}) = \begin{pmatrix} g + A & B \\ B^T & g, \end{pmatrix}
$$

onde A é a matriz dada por $A_{j_1 j_2} = \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} \Gamma^{i_2}_{j_2 k_2} y^{k_1} y^{k_2} g_{i_1 i_2}$, e B é dada por $B_{j_1(n+j_2)} = \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} y^{k_1} g_{i_1 j_2}$. Com isso,

$$\begin{aligned}(\mathrm{div} G)_{(p,v)} &= \sum_{i=1}^{n} y^i(p) \frac{\partial(\sqrt{|g_T|})}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} y^i(p) \frac{1}{\sqrt{|g_T|(p)}} \frac{\partial |g_T|}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{y^i(p)}{\sqrt{|g|^2(p)}} \frac{\partial |g_T|}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} y^i(p) \frac{\partial |g_T|}{\partial x^i}(p).\end{aligned}$$

O determinante de g_T pode ser dado por

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{2n}} \varepsilon_{i_1 \ldots i_{2n}} (g_T)_{1 i_1} \ldots (g_T)_{2n i_{2n}}$$

e portanto sua derivada com respeito a x^i avaliada em p será

$$\frac{\partial |g_T|}{\partial x^i}(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_{2n},j} \varepsilon_{i_1 \ldots i_{2n}} (g_T)_{1 i_1}(p) \ldots \frac{\partial (g_T)_{j i_j}}{\partial x^i}(p) \ldots (g_T)_{2n i_{2n}}(p).$$

Note que, para um termo desta soma ser não-nulo, deve-se ter que $(i_1, \ldots i_{2n})$ é permutação de $(1, \ldots, 2n)$, e para $k \neq j$, ter $(g_T)_{k i_k}(p) \neq 0$. Mas do que sabemos dos coeficientes de g_T, isto ocorre se e somente se $i_k = k$, e para que seja permutação, $i_j = j$. Assim, $(g_T)_{j i_j} = g_{jj} + A_{jj}$, ou $(g_T)_{j i_j} = g_{jj}$. Em ambos os casos, sua derivada com respeito a x^i se anula, e concluímos que todo termo do somatório acima se anula.

Isto conclui a demonstração que $\mathrm{div} G = 0$, e o fluxo geodésico preserva o volume riemanniano em TM dado pela métrica de Sasaki.

Tese de Mestrado que fala de métricas no fibrado tangente, em particular a de Sasaki.