Supervariedades

Motivações Físicas e a Ideia de Espaço

Eduardo Ventilari Sodré

19 de Dezembro de 2022

IME-USP

Estrutura do Seminário

- Contextualização e Motivação Pela Física de Partículas
- A Noção de Espaços na Física e Matemática
- Superálgebra Linear
- Feixes e Espaços Anelares
- Supervariedades

A Matemática da Mecância Quântica

Mecânica Clássica:

- Espaço de estados S
- Evolução dinâmica $D_t : S \to S$, $t \in \mathbb{R}$
- Simetrias relativísticas $P \times S \to S$
- Observáveis $f : S \to \mathbb{R}$

Mecânica Lagrangiana: $S = TM$, equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0.$$

Mecânica Hamiltoniana: $S = T^*M$, equações de Hamilton:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

A Matemática da Mecânica Quântica

Sistema quântico:

- Sistema quântico dado por espaço de Hilbert $\mathcal{H}$
- Espaço de estados $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, vetores unitários ψ a menos de fase
- Observáveis são operadores autoadjuntos $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
- Medição de A do sistema no estado ψ: natureza probabilística

Caso de A com autovalores discretos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$ e autovetores $\psi_1, \psi_2, \ldots$. Então

$$\mathrm{Prob}_\psi(A = \lambda_i) = |(\psi, \psi_i)|^2.$$

Mais geralmente: medida espectral $A \mapsto P^A$, densidade de probabilidade para a medição no estado ψ.

A Matemática da Mecânica Quântica

Exemplo: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{H}$, operadores posição e momento

$$Q(\psi)(x) = x\psi(x), \qquad P(\psi)(t,x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x).$$

em que

$$[Q, P] = i\hbar.$$

Probabilidade de encontrar partícula em $[a, b]$ é

$$\int_a^b |\psi|^2 dx$$

Autofunções do operador posição: são os deltas de Dirac

$$Q(\delta_{x_0}) = x_0 \delta_{x_0}.$$

Simetrias de um Sistema Quântico

Simetrias: $s : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$ que preservam $|(\psi, \psi')|^2$.

Se $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é (anti-)unitário, induz simetria.

Estuda representações unitárias projetivas de um grupo G em $\mathcal{H}$.
Quando são induzidas de representações unitárias?

$G = \mathrm{SO}(3)$: simetria rotacional.

$G = \mathrm{SO}(1,3)^0$: simetria relativística.

$P = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(1,3)^0$ grupo de Poincaré.

Mecânica Quântica Relativística = Representações Unitárias de P

Classificação de Partículas

Algumas representações de P: $L^{\pm}_{m,j}$, par partícula-antipartícula de massa m e spin $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Teorema da Estatística do Spin:

- Função de onda de partícula de spin inteiro é simétrica: **bósons**.
- Função de onda de partícula de spin meio-inteiro é antissimétrica: **férmions**.

Caso do elétron: princípio da exclusão de Pauli.

Sistemas Quânticos de Várias Partículas

Sistema quântico $\mathcal{H}$ de uma partícula, partículas idênticas: $\mathcal{H}^{\otimes N}$.

- Bósons: Se comportam como $S^N(\mathcal{H})$.
- Férmions: Se comportam como $\Lambda^N(\mathcal{H})$.

Espaço de Hilbert $\mathcal{K}$ dos estados de 1 partícula: $\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$.

Para várias partículas: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduação

$$\mathcal{H} = S(\mathcal{K}_0) \otimes \Lambda(\mathcal{K}_1).$$

Vantagem em ter uma visão unificada: simetrias entre bósons e férmions.

Espaços com coordenadas bosônicas (comutativas) e fermiônicas (anticomutativas): quantizando, resultariam em teorias quânticas de campos supersimétricas.

A Evolução do Conceito de Espaço

Riemann: Separação entre espaço e as relações métricas nele.

Coordenadas locais, geometria infinitesimal e curvatura

Geometria do Espaço Físico não é independente dos fenômenos físicos!

Einstein: A relatividade especial e geral: ideia de *espaçotempo*, gravidade como manifestação da curvatura.

Mecânica Quântica: a geometria do infinitesimalmente pequeno?

Novos modelos de espaço para (tentar) conciliar QM e GR.

Coordenadas bosônicas e fermiônicas: permite tratamento de supersimetria (SUSY). Mas como é um espaço assim?

A Matemática dos Espaços

Superfícies de Riemann: colagem de domínios complexos com transições holomorfas.

Variedades = Espaço topológico + mudanças de coordenadas locais.

Colagem de pedaços locais: variedades e esquemas.

Entender espaços pelas *álgebras de funções neles*!

- Espaços CHauss $\cong$ $*$-álgebras de Banach comutativas;
- Variedades algébricas afins sobre $\mathbb{C} \cong$ álgebras finitamente geradas sobre $\mathbb{C}$ sem nilpontentes não-nulos; etc...

Princípio de Grothendieck: todo anel A é essencialmente anel de funções sobre um espaços $X = X(A)$.

Localizações: corresponde a *feixe de anéis* no espaço.

Superálgebra Linear

Superespaço vetorial $V = V_0 \oplus V_1$ sobre corpo k de char $k = 0$.

Elementos pares ($p(v) = 0$) e ímpares ($p(v) = 1$).

Morfismos $V \to W$ preservam a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduação.

Hom interno: todos os mapas lineares $V \to W$.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\mathrm{Hom}}_k(V, W) = \underline{Hom}_k(V, W)_0 \oplus \underline{\mathrm{Hom}}_k(V, W)_1$.

Superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ é superespaço vetorial com

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j}, \qquad i, j \mod 2,$$

ou seja, $p(ab) = p(a) + p(b)$.

É **supercomutativa** se

$$ab = (-1)^{p(a)p(b)} ba,$$

ou seja: pares comutam com todos, e ímpares anticomutam entre si.

Exemplos de Superálgebras

V espaço vetorial usual, $\bigwedge V$ é superálgebra com produto exterior.

Pares são da forma $\sum_{|I| \text{ par}} a^I \omega_I$, ímpares da forma $\sum_{|I| \text{ ímpar}} a^I \omega_I$, onde $I = \{i_1 < \ldots, i_r\}$ para $r = 1, \ldots, \dim V$.

Mais geralmente: **coordenadas Grassmannianas**

$$A = k[t^1, \ldots, t^p] \otimes \bigwedge(\theta^1, \ldots, \theta^q)$$

em que os t^i comutam, e os θ^j anticomutam entre si.

Superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é superespaço vetorial com supercolchete tal que

$$[a, b] = -(-1)^{p(a)p(b)}[b, a],$$

e identidade de Jacobi

$$[a, [b, c]] + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)}[b, [c, a]] + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)}[c, [a, b]].$$

Com $D \in \underline{\mathrm{Hom}}_k(A, A)$, D é **derivação** de superálgebra se

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(D)p(a)} aD(b).$$

Formam superálgebra de Lie! Exemplo de $\dfrac{\partial}{\partial t^i}$ pares, e $\dfrac{\partial}{\partial \theta^j}$ ímpares.

Feixes (de Anéis)

Variedade suave M.

Para abertos $U \subseteq M$: $U \mapsto C^\infty(U)$.

Para cada inclusão $r_{UV} : U \hookrightarrow V$, tem restrição $C^\infty(V) \to C^\infty(U)$.

Se $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ e $f_i \in C^\infty(U_i)$, existe $f \in C^\infty(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$?

Se e somente se as f_i concordam nas restrições:

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Associação $U \mapsto C^\infty(U)$ é um **feixe** de anéis comutativos com unidade!

Dada $F : M \to N$ e $V \subseteq N$, **pullbacks** $F^* : C^\infty(V) \to C^\infty(F^{-1}(V))$.

Feixes (de Anéis)

(M, C^∞) é feixe de anéis, mais especificamente *espaço anelar de funções*: os anéis são funções usuais em $U \subseteq M$.

Definição de variedade suave: espaço anelar de funções (X, R) localmente isomorfo a $(\mathbb{R}^n, C^\infty)$.

Generalização maior: não precisam ser *de-facto* funções sobre X!

Motivação vinda de GA: $\mathbb{C}[X, Y]/(X) =$ anel de funções polinomiais na reta $X = 0$.

$\mathbb{C}[X, Y]/(X^2) =$ anel de funções na *reta dupla* $X^2 = 0$. Presença de nilpotentes: valor numérico é 0, mas é geometricamente relevante.

Entender espaços a partir de feixes de anéis gerais.

Espaços Anelares

Espaço anelar $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$:

- $|X|$ espaço topológico (Hausdorff 2º enumerável);
- Feixe de anéis comutativos com unidade $\mathcal{O}_X$ em $|X|$.

$U \subseteq |X|$ aberto, $s \in \mathcal{O}_X(U)$ são **seções** em U.

Com $x \in |X|$, $x \in U \cap V$, e seções $s \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$, equivalência

$$f \sim g \iff \exists W \subseteq U \cap V \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

Classes de equivalência são o **talo** $\mathcal{O}_x$, anel de **germes** de x.

X é **espaço** de os talos $\mathcal{O}_x$ são **anéis locais**: possuem único ideal maximal $\mathfrak{m}_x$. Complementar são os germes invertíveis.

Morfismos Entre Espaços Anelares

X, Y espaços anelares, **morfismo** $\psi : X \to Y$:

- Função contínua $|\psi| : |X| \to |Y|$;
- Coleção de homomorfismos $\psi_V^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(|\psi|^{-1}(V))$ comutando com restrições.

Induz mapa $\mathcal{O}_{Y,\psi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$. É **morfismo de espaços** se leva $\mathfrak{m}_{\psi(x)}$ em $\mathfrak{m}_x$.

Superespaços

Definições análogas para **superespaços anelares** e **superespaços**.

Tomar feixe $\mathcal{O}_X$ de *superanéis supercomutativos com unidade*.

OBS.: Restrições $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ são morfismos de superanéis $\implies$ preservam a graduação. Igualmente para $\psi_V^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(|\psi|^{-1}(V))$.

Anel supercomutativo *local*: único ideal homogêneo maximal.

Superdomínios

Construção de supervariedades a partir de modelos locais.

Superdomínio $U^{p|q}$ é o superespaço $(U, C_U^{\infty p|q})$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^p$ aberto e

$$C_U^{\infty p|q} : V \to C_U^\infty(V)[\theta^1, \ldots, \theta^q], \quad V \subseteq U \text{ aberto,}$$

e θ^j anticomutam entre si. Ou seja:

$$C_U^{\infty p|q} = C^\infty|_U \otimes \bigwedge(\theta^1, \ldots, \theta^q).$$

Elementos são da forma

$$\sum_I f_I \theta^I,$$

$f_I \in C^\infty(V)$, $\theta^I = \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_r}$, $I = \{i_1 < \ldots < i_r\} \subseteq \{1, \ldots, q\}$.

Note que θ^j são nilpotentes! Valor numérico $= 0$.

Supervariedades

Uma **supervariedade** $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ é superespaço localmente isomorfo a $U^{p|q}$.

Dado $x \in |M|$, $\exists V \subseteq M$ com $x \in V$ tal que $V \cong V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ e

$$\mathcal{O}_M(V) \cong C_U^\infty|_V[\theta^1, \ldots \theta^q] \cong C^\infty(t^1, \ldots, t^n)([\theta^1, \ldots, \theta^q]$$

onde $\theta^i \theta^j = -\theta^j \theta^i$.

$(t^1, \ldots, t^p, \theta^1, \ldots, \theta^q)$ são as coordenadas locais de M em V.

$p|q$ é a **superdimensão** de M.

Valor de seções

Em supervariedade M, possível identificar estrutura suave em $|M|$.

com $0 \in \mathbb{R}^p$, vizinhança V e

$$A = C^\infty(V)[\theta^1, \ldots, \theta^q],$$

$s \in A$ é da forma

$$s = s_0 + \sum_i s_i \theta^i + \sum_{i<j} s_{ij} \theta^i \theta^j + \cdots$$

s é invertível sse s_0 for.

Define $s(0)$ **valor da seção** como s_0; único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $s - \lambda$ não é invertível em nenhuma vizinhança.

Noção de valor de seção $s \in \mathcal{O}_M$ em x: $s \mapsto \widetilde{s}(x)$.

A Variedade Reduzida

$s \mapsto \widetilde{s}(x)$ é homomorfismo $\mathcal{O}_M(U) \to \mathbb{R}$.

$s \mapsto \widetilde{s}$ é homomorfismo de $\mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}'_M(U)$, álgebra comutativa real de funções em U.

Como feixe, $\mathcal{O}'$ representa $|M|$ como variedade suave!

Variedade reduzida: M_{red}. Ainda, $U^{p|q}_{\text{red}} = U$.

Morfismos Entre Supervariedades

Morfismos $M \to N$ são morfismos de espaços. Preservar a graduação!

No caso de variedades:

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (y^1, \ldots, y^m),$$

os y^j são funções suaves de $x^1, \ldots, x^n$.

Caso análogo para supervariedades!

Exemplo de $\phi : \mathbb{R}^{1|2} \to \mathbb{R}^{1|2}$ tal que $|\phi| = \mathrm{Id}$. Coordenadas globais t, θ^1, θ^2. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{1|2})$:

$$f = f(t, \theta^1, \theta^2) = f_0(t) + f_1(t)\theta^1 + f_2(t)\theta^2 + f_{12}(t)\theta^1\theta^2.$$

Morfismos Entre Supervariedades

Como são os pullbacks? Preserva a graduação:

$$\phi^*(t) = t^* = t + f\theta^1\theta^2,$$
$$\phi^*(\theta^1) = \theta^{1*} = g_1\theta^1 + h_1\theta^2,$$
$$\phi^*(\theta^2) = \theta^{2*} = g_2\theta^1 + h_2\theta^2.$$

Supõe exemplo de $t^* = t + \theta^1\theta^2$, $\theta^{1*} = \theta^1$, $\theta^{2*} = \theta^2$.

Se g é função suave em t, formalmente devemos ter

$$\phi^* g = g(t + \theta^1\theta^2) = g(t) + g'(t)\theta^1\theta^2.$$

Se tivermos isso, podemos estender para $g \in C^\infty(U)[\theta^1, \theta^2]$ naturalmente.

Morfismos Entre Supervariedades

Teorema
Seja $U^{p|q}$ superdomínio, M supervariedade e $\phi : M \to U^{p|q}$ morfismo. Se

$$f_i = \phi^*(t^i),\ g_j = \phi^*(\theta^j),\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q$$

então f_i são elementos pares de $\mathcal{O}(M)$, e g_j são elementos ímpares de $\mathcal{O}(M)$.

Reciprocamente, se são dados $f_i, g_j \in \mathcal{O}(M)$ com f_i pares e g_j ímpares, existe um único morfismo de superespaços $\phi : M \to U^{p|q}$ tal que

$$f_i = \phi^*(t^i),\ g_j = \phi^*(\theta^j).$$

Morfismos Entre Supervariedades

Existência do morfismo: como definir pullback de $g(t^1, \dots, t^p)$?

Com cada $f_i = r_i + n_i$, com n_i nilpotente,

$$\phi^*(g) = g(r_1 + n_1, \dots, r_p + n_p) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha g}{\alpha!}(r_1, \dots, r_p) n^\alpha.$$

Para a unicidade: ideias de polinômios de Taylor em ideais de $\mathcal{O}_x$.

Temos essencialmente: para $\psi : M \to N$,

$$(t, \theta) \longmapsto (y, \varphi), \quad y = y(t, \theta),\ \varphi = \varphi(t, \theta).$$

O Espaço Tangente e Campos Vetoriais

Como classicamente: **vetor tangente** v é uma derivação no talo $\mathcal{O}_x$.

Em coordenadas locais: base $\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial \theta^j}\right|_x$, superespaço vetorial de dimensão $p|q$. Derivações pares e ímpares.

Com morfismo $\psi : M \to N$, tem $d\psi_x : T_x(M) \to T_{\psi(x)}(N)$ por

$$v \mapsto v \circ \psi^*.$$

Campos vetoriais: derivação de $\mathcal{O}_M$, ou seja, família de derivações $V_U : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U)$.

Por partições da unidade, pode considerar só $V : \mathcal{O}(M) \to \mathcal{O}(M)$.

O Funtor de Pontos

Pontos $x \in |M|$: não têm significado geométrico.

"Pontos ímpares": invisíveis topologicamente e por funções em $|M|$.

Noção mais adequada de pontos:

T e X superespaços. Um X-**ponto** de X é um morfismo $T \to X$:

$$X(T) = \mathrm{Hom}(T, X).$$

Pensar como pontos de X parametrizados por T. **Funtor de pontos** do superespaço X:

$$X : T \mapsto X(T), \quad X(\phi)(f) = f \circ \phi.$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & X(T) \\ S \arrow[r] & X(S) \arrow[u, "X(\phi)"'] \end{tikzcd}$$

Mesma noção para supervariedades.

O Funtor de Pontos

Consequência do Lema de Yoneda:

M, N supervariedades. Existe bijeção entre morfismos $\psi : M \to N$ e o conjunto de mapas $\psi_T : M(T) \to N(T)$, funtorial em T. Em particuçar, M e N são isomorfos sse seus funtores de pontos são isomorfos.

Proposição
Se M e T São supervariedades, então

$$M(T) = \mathrm{Hom}(T, M) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(M), \mathcal{O}(T)).$$

Exemplos de T-Pontos

$T = \mathbb{R}^{0|0}$: T-ponto em M é morfismo $\phi : \mathbb{R}^{0|0} \to M$.

Mapa contínuo $|\phi| : \mathbb{R}^0 \to |M|$: escolha de $|x| \in |M|$. E pullback $\phi^* : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{0|0}}$: associa valor da seção em x.

$$\mathbb{R}^{0|0}\text{-pontos em } M = \text{pontos (topológicos) em } |M|$$

T-pontos de $\mathbb{R}^{p|q}$: morfismo $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{p|q}) \to \mathcal{O}(T)$.

Corresponde a escolha de p seções pares e q seções ímpares de T, como visto!

$$\mathbb{R}^{p|q}(T) \cong \mathcal{O}_T(T)_0^p \oplus \mathcal{O}_T(T)_1^q.$$

Mais Construções Possíveis

Teoria de supervariedades bem análoga à clássica:

- Partições da unidade;
- Forma local de imersões e submersões;
- Fluxos e Distribuições;
- Teorema de Frobenius;
- **Supergrupos de Lie** e **Superálgebras de Lie**;
- **Superespaçotempos** e **Supergrupos de Poincaré**.

Referências

[CCF10] C. Carmeli, L. Caston e R. Fioresi. *Mathematical Foundations of Supersymmetry*. Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society, 2010.

[Var04] V. S. Varadarajan. *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*. Courant Lecture Notes. American Mathematical Society, 2004.