

# MAT0431 - Introdução à Topologia Algébrica

## Trabalho de Classificação de Superfícies

Eduardo Ventilari Sodré - NUSP 11222183

25 de Novembro de 2021

### Sumário

|                   |   |                    |
|-------------------|---|--------------------|
| <a href="#">1</a> | <a href="#">Introdução</a>                              | <a href="#">1</a>  |
| <a href="#">2</a> | <a href="#">Definições Iniciais</a>                     | <a href="#">2</a>  |
| <a href="#">3</a> | <a href="#">Apresentações Poligonais de Superfícies</a> | <a href="#">5</a>  |
| <a href="#">4</a> | <a href="#">O Teorema de Classificação, Parte I</a>     | <a href="#">12</a> |
| <a href="#">5</a> | <a href="#">O Grupo Fundamental de uma Superfície</a>   | <a href="#">17</a> |
| <a href="#">6</a> | <a href="#">A Abelianização de Grupos</a>               | <a href="#">19</a> |
| <a href="#">7</a> | <a href="#">O Teorema de Classificação, Parte II</a>    | <a href="#">22</a> |

## 1 Introdução

Neste trabalho, estudaremos a classificação de superfícies (variedades topológicas de dimensão 2) compactas. O teorema usual de classificação é o seguinte:

**Teorema 1.1 (Classificação das superfícies).** *Toda superfície compacta é homeomorfa a uma, e exatamente uma, das superfícies listadas a seguir:*

- $S^2$ , a 2-esfera;
- $\overbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}^g$ , a soma conexa de  $g$  toros;

- $\overbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}^h$ , a soma conexa de  $h$  planos projetivos.

Demonstraremos inicialmente a parte do enunciado que afirma que toda superfície compacta é homeomorfa a uma das listadas acima (e não necessariamente a exatamente uma). Isto é feito assumindo o seguinte resultado sobre triangulação de superfícies:

**Teorema 1.2 (Triangulação de 2-Variedades).** *Toda superfície é homeomorfa ao poliedro de um complexo simplicial de dimensão 2, no qual todo 1-simplexo é a face de exatamente dois 2-simplexos.*

Dada uma triangulação de uma superfície, constrói-se uma *representação* dela, que codifica algebricamente sua estrutura topológica, e que podemos recuperá-la totalmente a partir desta informação. A ideia principal é que, dadas *regiões poligonais* no plano, o espaço quociente obtido a partir da identificação de arestas sob certas condições será uma superfície compacta, e toda triangulação produz uma superfície dessa maneira.

Podemos então estudar superfícies a partir das *apresentações poligonais* abstratas, que nos dizem como identificar arestas destas regiões poligonais, e produzem uma realização geométrica de uma superfície correspondente. Certas operações algébricas nestas regras de identificação corresponderão a equivalências topológicas entre as superfícies realizadas, de modo que, utilizando tais operações, poderemos reduzir toda representação a uma forma “canônica”, correspondendo exatamente ao enunciado do teorema de classificação de superfícies.

## 2 Definições Iniciais

Dados  $k + 1$  pontos  $v_0, \dots, v_k$  em  $\mathbb{R}^n$  afinamente independentes, ou seja, tais que  $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$  é conjunto linearmente independente, o **simplexo** (ou  **$k$ -simplexo**) gerado por eles é o conjunto

$$[v_0, \dots, v_k] := \left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}.$$

Os pontos  $v_i$  são os **vértices** do simplexo. Todo simplexo gerado por um subconjunto não-vazio dos vértices é uma **face** do simplexo. É fácil demonstrar que todo  $k$ -simplexo é homeomorfo à bola unitária fechada  $\overline{\mathbb{B}^k}$ .

Um **complexo simplicial** é uma coleção  $K$  de simplexos em um  $\mathbb{R}^n$  tal que:

- Toda face de um simplexo em  $K$  é simplexo contido em  $K$ ;
- A interseção de dois simplexos em  $K$  ou é vazia, ou é uma face de cada;
- $K$  é coleção localmente finita.

Trabalharemos principalmente com complexos simpliciais finitos, portanto não nos preocuparemos tanto com a última condição, sendo satisfeita automaticamente. Dado um complexo simplicial  $K$ , seu **poliedro**  $|K|$  é a união de todos os simplexos em  $K$  com a topologia induzida de  $\mathbb{R}^n$ . Na linguagem de CW-complexos, os interiores dos simplexos de  $K$  formam decomposição celular do poliedro que o tornam um CW-complexo regular.

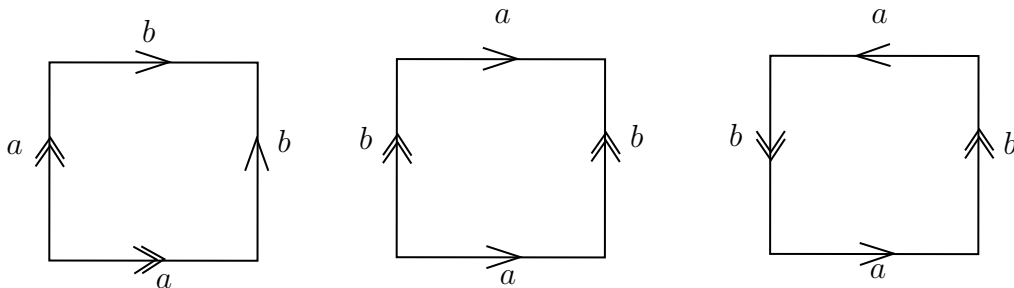
Dados  $K$  e  $L$  complexos simpliciais, com 0-esqueletos  $K_0$  e  $L_0$  respectivamente, dizemos que  $f : |K| \rightarrow |L|$  é um **mapa simplicial** se é função contínua tal que, restrita a cada simplexo  $\sigma \in K$ , concorda com um mapa afim levando  $\sigma$  num simplexo em  $L$ . Naturalmente  $f$  induz um mapa  $f_0 : K_0 \rightarrow L_0$  entre os vértices dos simplexos, e é possível demonstrar o seguinte resultado: se  $f_0 : K_0 \rightarrow L_0$  é mapa tal que se  $\{v_0, \dots, v_k\}$  são vértices de um simplexo em  $K$  então  $\{f_0(v_0), \dots, f_0(v_k)\}$  são vértices de simplexo em  $L$ , então existe mapa simplicial  $f$  entre  $K$  e  $L$  tal que o mapa induzido entre os vértices é  $f_0$ .

Um **polígono** é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo ao  $S^1$ , e união finita de 1-simplexos (ou seja, segmentos de reta) que se intersectam apenas em suas extremidades). Uma **região poligonal** é um compacto de  $\mathbb{R}^2$  cujo interior é homeomorfo ao disco unitário aberto (ou seja, o interior é uma 2-célula) e cuja fronteira é um polígono. Os 0-simplexos do polígono são seus **vértices**, e os 1-simplexos são suas **arestas**.

**Proposição 2.1.** *Sejam  $P_1, \dots, P_k$  regiões poligonais no plano, e considere uma relação de equivalência em  $\bigsqcup P_i$  que identifica algumas das arestas com outras por meio de homeomorfismos afins.*

- (i) *O espaço quociente resultante é um CW-complexo finito de dimensão 2, cujo 0-esqueleto é a imagem dos vértices pela projeção, e cujo 1-esqueleto é a união dos polígonos.*
- (ii) *Se a relação de equivalência identifica cada aresta de cada  $P_i$  com exatamente uma outra aresta de algum  $P_j$ , podendo ser igual a  $P_i$ , então o espaço quociente resultante é uma superfície compacta.*

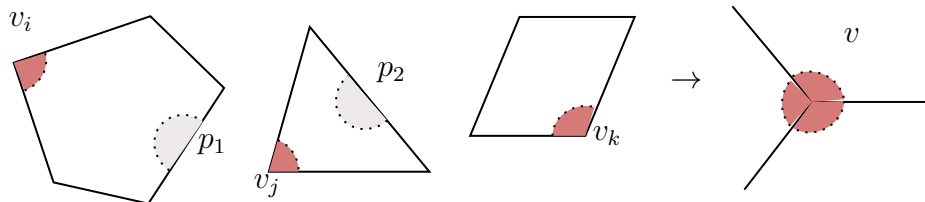
Exemplos simples do resultado acima são a esfera  $S^2$ , o toro  $T^2$  e o plano projetivo  $\mathbb{R}P^2$ , obtidos a partir da identificação de arestas num quadrado, como nos esquemas abaixo (respectivamente).



*Demonstração.* Sendo  $M$  o espaço quociente, temos o mapa quociente  $\pi : P \rightarrow M$ , e  $M_0$ ,  $M_1$  e  $M_2$  a imagem dos vértices, das fronteiras, e das regiões poligonais por  $\pi$ , respectivamente.  $M_0$  naturalmente será discreto, como imagem de conjunto finito, e  $M_k$  é obtido de  $M_{k-1}$  a partir da colagem de quantidade finita de  $k$ -células. Pela construção indutiva de CW-complexos, o resultado do item (i) segue.

Para o item (ii), é suficiente mostrar que  $M$  é localmente euclidiano. As 2-células, correspondendo às imagens dos pontos interiores das regiões poligonais, são abertas em  $M$ , e são vizinhanças euclidianas de seus pontos; então basta encontrar vizinhanças euclidianas dos pontos nas 0-células, os vértices identificados, e nas 1-células, as arestas sem os vértices identificadas. É imediato ver que os pontos nas 1-células admitem vizinhanças euclidianas, pois cada um tem duas pré-imagens nos bordos de regiões poligonais, admitindo então meia-bolas coordenadas. Diminuindo elas conforme necessário, e pela colagem identificando tais arestas, constrói-se a vizinhança euclidiana.

Agora, a ideia para as 0-células, é considerar os vértices  $v_1, \dots, v_k$  identificados, e encontrar vizinhanças  $V_i$  pequenas deles para as quais  $V_i \cap P_{j_i}$  será um “canto”. É simples construir homeomorfismo destas vizinhanças para setores circulares de ângulo  $2\pi/k$ , e como as arestas são pareadas com exatamente uma outra, elas devem necessariamente poder ser mapeadas ao redor de vizinhança da origem colando e rotacionando-as. Para garantir que respeitam as identificações de arestas, é suficiente fazer reescalamentos adequados delas. Obtemos então aberto saturado de  $P$ , que desce para um homeomorfismo de vizinhança da 0-célula para vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^2$ .



□

### 3 Apresentações Poligonais de Superfícies

Dado um conjunto  $S$  de símbolos, consideram-se as **palavras** que podem ser construídas de  $S$ , uma  $k$ -upla ordenada com elementos da forma  $a$  ou  $a^{-1}$  com  $a \in S$ . A palavra é representada pela concatenação de seus elementos. Uma **apresentação poligonal**, escrita da forma

$$\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle,$$

é um conjunto finito  $S$  de símbolos, e palavras  $W_1, \dots, W_k$  de tamanho maior ou igual a 3 consistindo destes símbolos, cada símbolo aparecendo em pelo menos uma palavra. Nos interessamos pela **realização geométrica** de tal apresentação, intuída pela proposição 2.1. A cada palavra  $W_i$  de tamanho  $k_i$ , associa-se a região poligonal convexa  $P_i$  de  $k_i$  arestas, cada uma de comprimento 1, centro na origem e vértice no eixo  $y$  positivo; e cada símbolo em  $S$  é uma classe de equivalência de arestas dos  $P_i$  identificadas. Nesse sentido, os símbolos de  $W_i$  representam as suas arestas, com a convenção de estarem em ordem anti-horária a partir do vértice no eixo  $y$  positivo, e se um símbolo em  $W_i$  é  $a^{-1}$  com  $a \in S$ , é porque a identificação da aresta respectiva é feita invertendo sua orientação com respeito a seus vértices, ou seja, no sentido horário. Permitem-se também os caso especiais de apresentações com um único símbolo e uma única palavra de tamanho 2, sendo  $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ ,  $\langle a \mid aa \rangle$ ,  $\langle a \mid a^{-1}a \rangle$  e  $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$ .

A convenção tomada sobre a disposição da região poligonal no plano, com respeito a seus comprimentos, centro na origem e vértice no eixo  $y$  positivo é feita para tornar a definição não ambígua. Veremos no entanto que não importará sua posição exata no plano, num sentido específico. Nesta linha, nos diagramas traçados para interpretar geometricamente a construção de apresentações poligonais, nos daremos o luxo de não representar as regiões poligonais exatamente da maneira como descritas acima, mas ainda compreendendo toda a informação geométrica relevante. Assim, obtém-se  $|\mathcal{P}|$  o espaço quociente de  $\bigsqcup_i P_i$  sob tais identificações.

De acordo com os exemplos vistos, temos que

- a realização geométrica da apresentação  $\langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle$  é homeomorfa à esfera  $S^2$ ;
- a realização de  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$  é homeomorfa ao toro  $T^2$ ;
- e a realização de  $\langle a, b \mid abab \rangle$  é homeomorfa ao plano projetivo  $\mathbb{R}P^2$ .

Observe que as quatro apresentações especiais descritas tem como realizações a esfera e o plano projetivo também. Naturalmente, as faces, arestas

e vértices dos  $P_i$  são as faces, arestas e vértices da apresentação, e dizemos que é uma **apresentação de superfície** se cada símbolo  $a \in S$  ocorre exatamente duas vezes nas palavras  $W_1, \dots, W_k$ , de acordo com o item (ii) da proposição 2.1. Se  $X$  é um espaço topológico homeomorfo à realização geométrica de uma dada apresentação, diz-se que é uma **apresentação de  $X$** .

A ideia agora é entender como apresentações distintas podem ser apresentações de um mesmo espaço, e então, encontrar para cada superfície (triangulável) uma apresentação em “forma canônica”. Se duas apresentações  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  possuem realizações geométricas homeomorfas, dizemos que elas são **topologicamente equivalentes** e denotamos  $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$ . Serão apresentadas certas operações feitas em apresentações poligonais, em que demonstra-se resultarem em apresentações topologicamente equivalentes. Fortuitamente, tais operações tem forte intuição geométrica em como agem nas realizações geométricas.

Temos desta maneira as seguintes **transformações elementares** nas apresentações poligonais:

- **Re-rotulagem:** Trocar todas as instâncias de um símbolo  $a \in S$  por um novo símbolo  $e \notin S$ , trocar todas as instâncias de dois símbolos  $a, b \in S$ , ou trocar as ocorrências de  $a \in S$  por  $a^{-1}$  (convencionando  $(a^{-1})^{-1}$ ).
- **Subdivisão:** Trocar as ocorrências de  $a \in S$  e  $a^{-1} \in S$  por  $ae$  e  $e^{-1}a^{-1}$  respectivamente, com  $e \notin S$ .
- **Consolidação:** Se  $a, b \in S$  ocorrem sempre adjacentes, em  $ab$  ou  $b^{-1}a^{-1}$ , trocar toda ocorrência de  $ab$  por  $a$  e  $b^{-1}a^{-1}$  por  $a^{-1}$  (dadas as condições vistas sobre o tamanho de palavras nas apresentações).
- **Reflexão:** Com  $W_1 = a_1 \dots a_m$  e convencionando  $W_1^{-1} = a_m^{-1} \dots a_1^{-1}$ ,

$$\langle S \mid W_1, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Rotação:** Com  $a_1, \dots, a_m \in S$ ,

$$\langle S \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Corte:** Com  $W_1, W_2$  de tamanho pelo menos 2 e  $e \notin S$ ,

$$\langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Colagem:**

$$\langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 W_2, W_3 \dots, W_k \rangle.$$

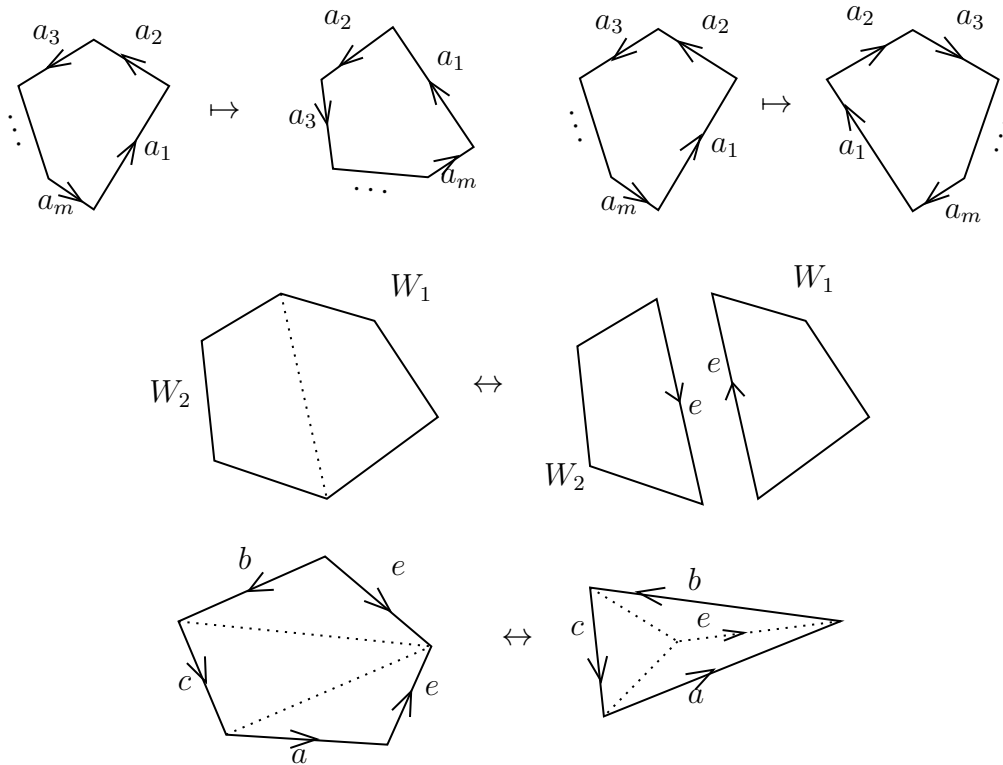
- **Dobra:** Se  $W_1$  tem tamanho pelo menos 3 e  $e \notin S$ ,

$$\langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, W_3 \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1, W_2, W_3 \dots, W_k \rangle.$$

- **Desdobra:** Com  $e \notin S$ ,

$$\langle S \mid W_1, W_2, W_3 \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, W_3 \dots, W_k \rangle.$$

A ideia intuitiva por trás destas operações elementares está em seus nomes, e nas figuras abaixo. Respectivamente, tem-se reflexão, rotação, corte/colagem, e dobra/desdobra:



**Proposição 3.1.** *Cada transformação elementar em uma apresentação poligonal resulta em uma apresentação topologicamente equivalente.*

*Demonstração.* Essencialmente mostra-se que certos mapas quocientes fazem as mesmas identificações, de modo que os espaços quocientes são homeomorfos. Como as operações de colagem e corte, dobra e desdobra, subdivisão e consolidação são inversas, é suficiente mostrar a equivalência topológica de apenas uma em cada par.

É imediato que a operação de re-rotulagem produz as mesmas identificações, e as operações de reflexão e rotação também o fazem ao tomar  $f : P \rightarrow P'$  definida no plano como rotação pelo ângulo  $2\pi/k$  ou reflexão com respeito ao eixo  $y$ , onde  $P$  e  $P'$  são as regiões poligonais correspondentes às palavras.

Para subdivisão, seja  $P$  a região poligonal associada à palavra  $W_1$ , e  $P'$  a região poligonal associada à palavra  $W_1$  com subdivisão de  $a \in S$  em  $ae$ , de modo que  $\pi : P \rightarrow M$  e  $\pi' : P' \rightarrow M'$  são os mapas quocientes. Traçando os pontos médios das arestas em  $P$  rotuladas por  $a$ , e ligando os vértices e estes pontos médios ao centro do polígono, obtém-se uma triangulação dele, sendo poliedro de um complexo simplicial. Levando as arestas deste complexo nas arestas de  $P'$  de mesmos rótulos, estende-se tal associação a um mapa simplicial  $f : P \rightarrow P'$ , e os mapas  $\pi' \circ f$  e  $\pi$  realizam as mesmas identificações. O raciocínio estende-se a todas as outras palavras onde ocorrem  $a \in S$ , com as projeções agora globais e de modo que  $M$  e  $M'$  são homeomorfos.

Para a operação de colagem, considere regiões poligonais  $P_1$  e  $P_2$  associadas às palavras  $eW_1$  e  $e^{-1}W_2$  respectivamente, e  $P'$  região poligonal associada a  $W_1W_2$ . Assuma sem perda de generalidade que estas são as únicas palavras nas apresentações, obtendo os mapas quocientes  $\pi' : P' \rightarrow M'$  e  $\pi : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow M$ . Considera-se o segmento de reta que liga o vértice terminal da palavra  $W_1$  em  $P'$  ao seu vértice inicial, e denote-o por  $e$ . Existe então mapa contínuo  $f : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow P'$  que leva arestas de certo rótulo no rótulo correspondente, e cuja restrição a  $P_i$  é homeomorfismo sobre a imagem; isto é consequência de serem 2-células fechadas, e homeomorfismos de suas fronteiras se estenderem ao interior homeomorficamente. Como  $f$  é sobrejetora e  $P_1 \sqcup P_2$  é compacto, o mapa será quociente, identificando apenas as arestas  $e$  e  $e^{-1}$ . Então  $\pi' \circ f$  e  $\pi$  realizam as mesmas identificações, então os espaços quocientes são homeomorfos.

Com respeito à dobra, podemos novamente supor que há apenas uma palavra na apresentação, e se  $W_1$  tem tamanho 2, podemos subdividir, dobrar e depois consolidar. Podemos então assumir também  $W_1$  com tamanho  $\geq 3$ ; Façamos o caso de tamanho 3, com a palavra  $abc$ , conforme na figura anterior. Com  $P$  e  $P'$  as regiões poligonais associadas às palavras  $abcee^{-1}$  e  $abc$ , temos os mapas quocientes  $\pi : P \rightarrow M$  e  $\pi' : P' \rightarrow M'$ . As triangulações indicadas na figura tornam  $P$  e  $P'$  poliedros de complexos simpliciais, e é possível tomar um mapa simplicial entre eles  $f : P \rightarrow P'$  entre arestas de mesmo rótulo.

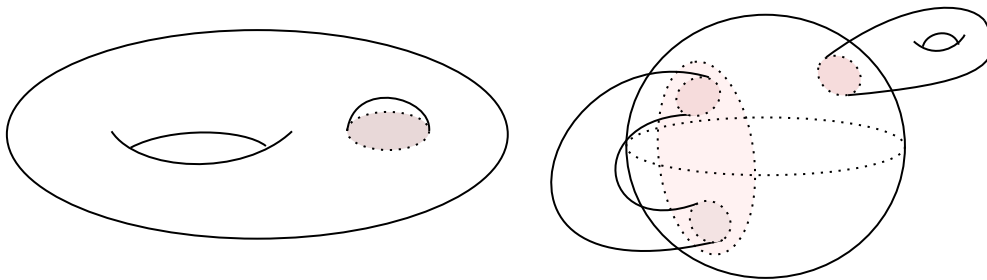


Com  $\pi' \circ f$  e  $\pi$  realizando as mesmas identificações, os espaços quocientes são homeomorfos. □

Agora, é necessário entender como que somas conexas de superfícies interagem com apresentações de superfícies, de uma maneira que podemos compreendê-las como no teorema de classificação. Relembre que, se  $M_1, M_2$  são duas variedades topológicas de mesma dimensão  $n$ , a sua **soma conexa**  $M = M_1 \# M_2$  é obtida da seguinte maneira. Tomam-se bolas coordenadas regulares  $B_1 \subseteq M_1$  e  $B_2 \subseteq M_2$ , ou seja, subconjuntos homeomorfos a bolas unitárias abertas  $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$  pré-compactas em  $M_1$  e  $M_2$ , de modo que  $M_1' = M_1 \setminus B_1$  e  $M_2' = M_2 \setminus B_2$  são variedades topológicas com bordo homeomorfo a  $S^{n-1}$ . Dado então homeomorfismo  $f : \partial M_2' \rightarrow \partial M_1'$ , cria-se o espaço de adjunção  $M_1' \cup_f M_2'$ , denotado por  $M_1 \# M_2$ . Lembre que, num espaço de adjunção,  $M_1' \cup_f M_2' = M_1' \sqcup M_2' / \sim$ , onde  $x \sim f(x)$  para  $x \in \partial M_2'$ .

Aparentemente, a definição de soma conexa de variedades depende de várias escolhas feitas em sua construção, como nas bolas coordenadas regulares  $B_i$ , e no homeomorfismo  $f$  tomado. No caso especial de dimensão 2, ou seja, superfícies, é possível demonstrar, embora não o faremos aqui, que o espaço obtido como soma conexa independe destas escolhas, a menos de homeomorfismo.

Observe, por exemplo, que a soma conexa de uma superfície  $M$  com a esfera  $S^2$  será sempre homeomorfa à própria superfície. Dada bola coordenada regular  $B_2 \subseteq S^2$ , o subespaço  $S^2 \setminus B_2$  é homeomorfo à bola unitária fechada  $\overline{\mathbb{B}^2}$ ; neste sentido, estaria-se tirando de  $M$  disco aberto, e colando-se no lugar outro disco aberto ao longo da fronteira. Agora, ao realizar a soma conexa de uma superfície com um toro  $T^2$ , a ideia intuitiva é que se está acoplando “alças” à superfície.



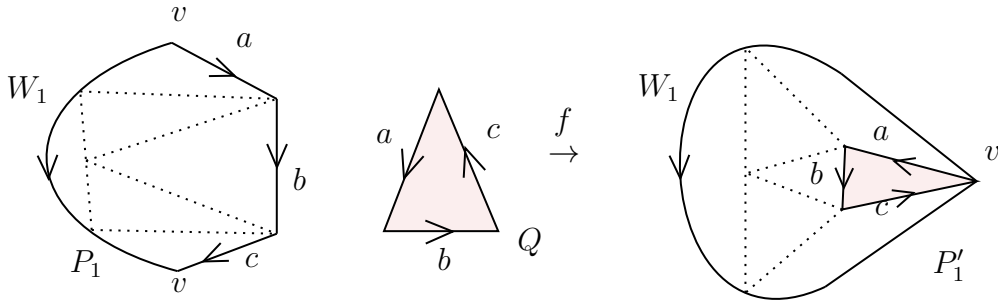
Vejamos agora a relação entre somas conexas com apresentações de superfícies:

**Proposição 3.2.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies compactas que admitem representações  $\langle S_1 \mid W_1 \rangle$  e  $\langle S_2 \mid W_2 \rangle$  respectivamente, tal que  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  e ambas apresentações têm uma única face. Então  $M_1 \# M_2$  é realização geométrica da apresentação  $\langle S_1 \cup S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$ .*

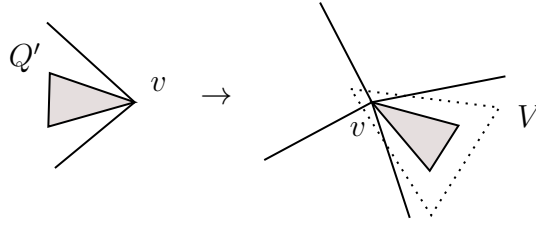
*Demonstração.* Sabemos que

$$\langle S, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle \approx \langle S \mid W_1 \rangle$$

é apresentação de  $W_1$ , e considere  $B_1$  a imagem em  $M_1$  do interior da região poligonal limitada pelo triângulo  $abc$ . Afirma-se que  $B_1$  é bola coordenada regular de  $M_1$ , ou seja, ele admite vizinhança aberta que é disco sob uma carta de  $M_1$ , e para esta carta,  $\overline{B_1}$  é disco fechado menor. Isto é intuído a partir da seguinte triangulação de regiões poligonais:



Como acima, sejam  $P_1$ ,  $Q$  e  $P_1'$  as regiões poligonais delimitadas pelas palavras  $W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}$ ,  $abc$  e  $W_1$ , respectivamente. A “colagem” de  $Q$  com  $P_1$  a partir desta triangulação é representada por meio de um mapa simplicial  $f : P_1 \sqcup Q \rightarrow P_1'$ , levando  $Q$  num triângulo  $Q' \subseteq P_1'$  compartilhando vértice rotulado por  $v$ . Agora, a composição  $P_1 \sqcup Q \rightarrow P_1' \rightarrow M_1$  respeita as identificações feitas no mapa quociente  $P_1' \rightarrow M_1$ , de modo que a composição desce para um homeomorfismo levando  $B_1$  na imagem de  $Q'$ . Como feito na proposição 2.1, para encontrar vizinhança euclidiana de vértices em apresentações de superfícies, juntamos os vários “cantos” deste vértice numa bola coordenada. A partir desta construção,  $Q'$  será homeomorfo a disco fechado no plano, e é possível estender tal homeomorfismo para uma vizinhança maior de  $Q'$ , sabendo como os cantos se juntam em  $v$ .



□

Com isso, sabemos que o teorema da classificação é equivalente a encontrar, para uma dada superfície, uma apresentação poligonal de uma das seguintes formas:

- A esfera  $S^2$ ,  $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ ;
- A soma conexa de  $g$  toros  $T^2 \# \dots \# T^2$ ,

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle;$$

- A soma conexa de  $h$  planos projetivos  $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ ,

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n \rangle.$$

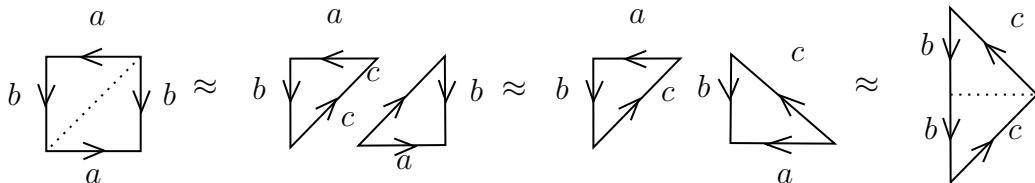
**Lema 3.3.** a) A garrafa de Klein  $K$ , dada pela apresentação de superfície  $\langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$ , é homeomorfa a  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ .

b) A soma conexa  $T^2 \# \mathbb{RP}^2$  é homeomorfa a  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ .

*Demonstração.* Veja que, por meio das transformações elementares,

$$\begin{aligned} \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle &\approx \langle a, b, c \mid abc, c^{-1}ab^{-1} \rangle \approx \langle a, b, c \mid abc, ba^{-1}c \rangle \\ &\approx \langle a, b, c \mid abc, a^{-1}cb \rangle \approx \langle a, b, c \mid bca, a^{-1}cb \rangle \approx \langle b, c \mid bccb \rangle \\ &\approx \langle b, c \mid bbcc \rangle \approx \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2. \end{aligned}$$

A intuição geométrica por trás desta sequência de operações algébricas é representada abaixo:



Agora, para o item b), tem-se que  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong K \# \mathbb{RP}^2$ , então podemos calcular

$$\begin{aligned}
\langle a, b, c \mid aabbcc \rangle &\approx \langle a, b, c \mid abab^{-1}cc \rangle \approx \langle a, b, c \mid cabab^{-1}c \rangle \\
&\approx \langle a, b, c, d \mid cabd, d^{-1}ab^{-1}c \rangle \approx \langle a, b, c, d \mid cabd, c^{-1}ba^{-1}d \rangle \\
&\approx \langle a, b, c, d \mid abdc, c^{-1}ba^{-1}d \rangle \approx \langle a, b, d \mid abdba^{-1}d \rangle \\
&\approx \langle a, b, d \mid a^{-1}dabdb \rangle \approx \langle a, b, d, e \mid a^{-1}dabde, e^{-1}db \rangle \\
&\approx \langle a, b, d, e \mid ea^{-1}dab, b^{-1}d^{-1}e \rangle \approx \langle a, d, e \mid ea^{-1}dad^{-1}e \rangle \\
&\approx \langle a, d, e \mid (a^{-1})d(a^{-1})^{-1}d^{-1}ee \rangle \approx \langle d, e, f \mid fdf^{-1}d^{-1}ee \rangle \\
&\approx T^2 \# \mathbb{RP}^2,
\end{aligned}$$

novamente utilizando as transformações elementares de cortar, colar, rotacionar e refletir.  $\square$

## 4 O Teorema de Classificação, Parte I

Com as ferramentas desenvolvidas até então, podemos demonstrar o teorema de classificação, reiterando a suposição do teorema de triangulação de superfícies. De fato, sua importância é fundamental pois ele permite concluir que

**Lema 4.1.** *Toda superfície triangulada admite apresentação de superfície.*

*Demonstração.* Dada uma triangulação de superfície  $M$ , temos que ela é homeomorfa ao poliedro  $|K|$  de um complexo simplicial de dimensão 2, tal que todo 1-simplexo é face de exatamente dois 2-simplexos. Considera-se então a apresentação de superfície  $\mathcal{P}$  com uma palavra de tamanho 3 para cada 2-simplexo da triangulação, e com rótulos das arestas correspondendo aos 1-simplexos, os quais pertencem a dois 2-simplexos distintos. Desta maneira, é imediato concluir que será uma apresentação de superfície, e precisamos mostrar que a superfície que é a realização geométrica é homeomorfa a  $M$ .

Com  $P = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k$  a união disjunta dos 2-simplexos de  $K$ , devemos mostrar que as projeções  $\pi_{\mathcal{P}} : P \rightarrow |\mathcal{P}|$  e  $\pi_K : P \rightarrow |K|$  realizam as mesmas identificações, onde  $|\mathcal{P}|$  é a superfície realizada por  $\mathcal{P}$ , pois então os espaços quocientes serão homeomorfos. De fato, para pontos nos interiores dos simplexos, os mapas são injetores, e eles fazem as mesmas identificações nas arestas: basta então ver a identificação nos vértices, sabendo que vértices são identificados apenas com outros vértices.

Precisa-se mostrar então que  $\pi_K$  identifica vértices apenas quando isto é forçado a partir da identificação de arestas, pois esta é a identificação feita

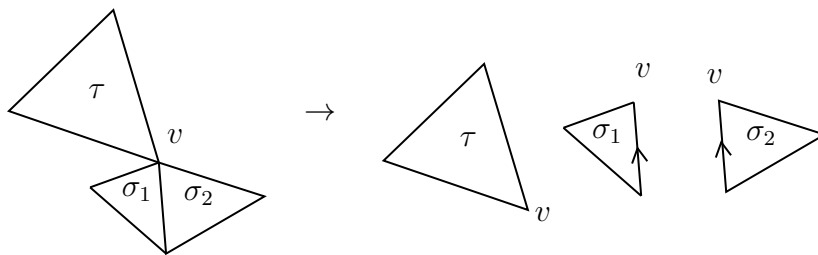
na apresentação  $\mathcal{P}$ . Dado então  $v \in K$  vértice do complexo, sabemos que  $v$  pertence a algum 1-simplexo, caso contrário ele seria vértice isolado, e que tal 1-simplexo é face de exatamente dois 2-simplexos. Considerando todos os 2-simplexos que contém  $v$ , dizemos que dois deles  $\sigma, \sigma'$  são **conectados por arestas em  $v$**  se existe sequência de 2-simplexos  $\sigma = \sigma_0, \dots, \sigma_k = \sigma'$  de 2-simplexos contendo  $v$  tais que  $\sigma_i$  compartilha aresta com  $\sigma_{i+1}$ , para  $i = 0, \dots, k-1$ . Note que se  $\sigma \neq \sigma'$ , a aresta compartilhada deve necessariamente conter  $v$ .

Ser conectado por arestas em  $v$  é relação de equivalência nos 2-simplexos que contém  $v$ , e mostremos que há uma única classe de equivalência; isto implica que todo vértice que é identificado com  $v$  na projeção tem tal identificação porque ela é forçada pelas arestas que contém  $v$ . Se há mais de uma classe de equivalência, agrupam-se os 2-simplexos que contém  $v$  em conjuntos disjuntos  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  e  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ , onde nenhum  $\tau_j$  é conectado por arestas em  $v$  com algum  $\sigma_i$ , e os  $\sigma_i$  são conectados por arestas entre si. Tomando vizinhança suficientemente pequena  $W$  de  $v$ , Teremos  $W$  aberto de  $|K|$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  que intersecta apenas aqueles simplexos que contém  $v$ .  $W \setminus \{v\}$  é conexo, mas

$$(W \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_k) \setminus \{v\}) \cup (W \cap (\tau_1 \cup \dots \cup \tau_m) \setminus \{v\})$$

formaria desconexão de  $W \setminus \{v\}$ , por serem dois abertos disjuntos, contradizendo ser conexo. O fato de serem abertos vem de que a topologia do poliedro do complexo simplicial é coerente com a de seus simplexos.

A figura abaixo indica um caso em que há classes distintas de 2-simplexos com respeito à conexão por arestas em  $v$ . Neste caso, a projeção  $\pi_{\mathcal{P}} : P \rightarrow |K|$  identifica o vértice  $v$  nos simplexos, mas nenhuma aresta de  $\tau$  é identificada com outra aresta de  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$ . Neste caso, o mais evidente é que o complexo não é localmente euclidiano em  $v$ .



□

*Demonstração do Teorema da Classificação.* A demonstração será feita em uma sequência de etapas, onde dada uma apresentação de superfície  $\mathcal{P}$  da

superfície  $M$ , procuraremos simplificar a apresentação aplicando sucessivamente transformações elementares. Diremos que um par de arestas a serem identificadas é um par **complementar** se ocorrem como  $a, a^{-1}$ , e par **torcido** se ocorrem como  $a, a$  ou  $a^{-1}, a^{-1}$ .

Primeiro, afirma-se que  $M$  admite apresentação com uma única face. De fato, com  $M$  conexo, se há mais de uma face, uma aresta de uma face deve estar identificada com aresta de outra, caso contrário estas duas faces desconectariam a superfície. Então podemos colar as faces ao longo desta aresta, com reflexões e rotações se necessário. Algebricamente, temos a simplificação

$$\begin{aligned} \langle S, a \mid XaY, ZaW, W_3, \dots, W_k \rangle &\approx \langle S, a \mid YXa, a^{-1}Z^{-1}W^{-1}, W_3, \dots, W_k \rangle \\ &\langle S \mid YXZ^{-1}W^{-1}, W_3, \dots, W_k \rangle, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \langle S, a \mid XaY, Za^{-1}W, W_3, \dots, W_k \rangle &\approx \langle S, a \mid YXa, a^{-1}WZ, W_3, \dots, W_k \rangle \\ &\approx \langle S \mid YXWZ, W_3, \dots, W_k \rangle \end{aligned}$$

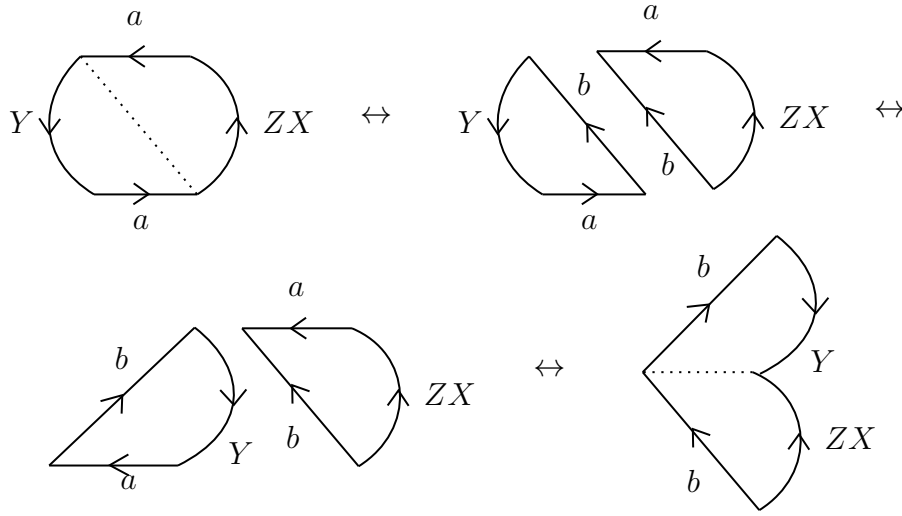
dependendo se o par com a aresta  $a$  é complementar ou torcido, e  $X, Y, Z, W$  palavras possivelmente vazias. Assim, indutivamente reduz-se o número de faces da apresentação até sobrar uma.

Em seguida, sabemos que ou  $M$  admite apresentação topologicamente equivalente à da esfera, ou admite apresentação sem pares complementares adjacentes ( $aa^{-1}$ ), pois se ocorressem, poderíamos eliminá-los pela transformação elementar de dobra. Assumimos então o caso em que  $M$  não admite apresentação da esfera  $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ .

Mostra-se agora que se a apresentação contém pares torcidos de arestas, podemos reduzir a apresentação onde todos os pares torcidos são adjacentes. Algebricamente, temos

$$\begin{aligned} \langle S, a \mid XaYaZ \rangle &\approx \langle S, a \mid ZXaYa \rangle \approx \langle S, a, b \mid ZXab, b^{-1}Ya \rangle \\ &\approx \langle S, a, b \mid bZXa, a^{-1}Y^{-1}b \rangle \approx \langle S, b \mid bZXY^{-1}b \rangle \approx \langle S, b \mid ZXY^{-1}bb \rangle. \end{aligned}$$

Geometricamente, as operações de cortar, refletir e colar são vistas como abaixo:



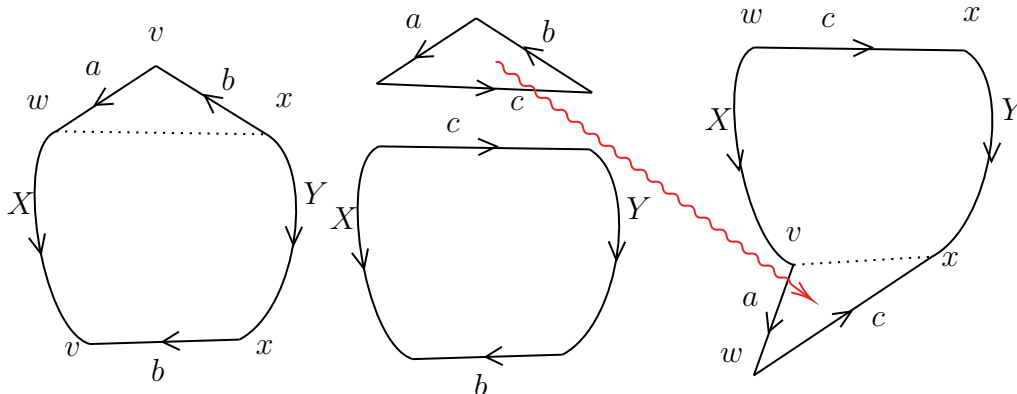
Esta simplificação troca o par torcido  $a, a$  pelo par torcido adjacente  $b, b$ , e não separa pares torcidos já adjacentes. É possível que tenham sido criados mais pares torcidos no processo, mas o total de pares não-adjacentes, sejam torcidos ou complementares, diminui em pelo menos 1. Após número finito de operações, reduzimos então a nenhum par torcido não-adjacente. Caso sejam criados pares adjacentes complementares, eles podem ser removidos como antes, de modo que  $M$  tem apresentação da esfera ou realiza-se a transformação elementar de dobra em cada tal par.

A próxima etapa é concluir que  $M$  admite apresentação onde todos os vértices são identificados a um único ponto. Para isto, tome uma classe de equivalência de vértices  $v$ , e supondo que há outros vértices não identificados com  $v$ , deve haver aresta conectando  $v$  a vértice de outra classe  $w$ , e rotule tal aresta  $a$ . É possível tomar rotulagem tal que  $a$  está disposta no sentido anti-horário, pois caso contrário basta refletir a face. Considere agora a outra aresta ligada ao vértice  $v$ ; ela não pode ser identificada à aresta  $a$ , pois já eliminamos pares complementares, e se fosse par torcido, isto implicaria que o vértice  $w$  seria identificado com  $v$ . Rotule então tal aresta por  $b$ , e o outro vértice dela por  $x$ .

Há dois casos a se considerar: se o par da aresta  $b$  é complementar ou torcido. Suponha inicialmente que seja complementar. Então temos nossa apresentação

$$\begin{aligned} \langle S, a, b \mid baXb^{-1}Y \rangle &\approx \langle S, a, b, c \mid bac, c^{-1}Xb^{-1}Y \rangle \\ &\approx \langle S, a, b, c \mid acb, b^{-1}YbaX \rangle \approx \langle S, a, c \mid acYbaX \rangle. \end{aligned}$$

Geometricamente, temos o seguinte:

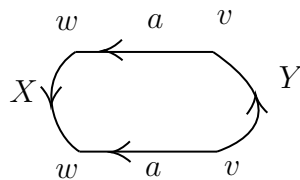


Note que, neste caso, a quantidade de vértices identificados com  $v$  diminui em 1, e a quantidade de vértices identificados com  $w$  aumentou em 1. Se tivermos introduzido par complementar adjacente, podemos removê-lo como antes, o que não aumenta a quantidade de vértices identificados com  $v$ . Agora, se o par de  $b$  é torcido, temos a apresentação

$$\begin{aligned} \langle S, a, b \mid baXbY \rangle &\approx \langle S, a, b, c \mid bac, c^{-1}XbY \rangle \\ &\approx \langle S, a, b, c \mid acb, b^{-1}XcY^{-1} \rangle \approx \langle S, a, c \mid acXcY^{-1} \rangle, \end{aligned}$$

onde analogamente ao caso acima, reduz-se estritamente a quantidade de vértices identificados com  $v$ . Repetindo o processo finitamente, podemos eliminar a classe de equivalência  $v$  nos vértices, e concluímos a existência de apresentação com único vértice e satisfazendo as outras condições vistas anteriormente.

Agora, se na apresentação há pares complementares  $a, a^{-1}$ , então mostremos que há outro par complementar  $b, b^{-1}$  *entrelaçado* com o primeiro, ou seja, tal que tem-se a disposição de arestas  $aXbYa^{-1}Zb^{-1}W$ . De fato, se isto fosse falso, a apresentação seria da forma  $aXa^{-1}Y$ , onde  $X$  e  $Y$  ambos contém apenas pares complementares ou pares torcidos adjacentes. Então arestas de  $X$  são identificadas apenas com arestas de  $X$ , e analogamente para  $Y$ ; mas isto contradiz as identificações dos vértices iniciais de  $a$  e  $a^{-1}$ , ambos contidos nas arestas de  $Y$ , e os vértices terminais de  $a$  e  $a^{-1}$ , contidos nas arestas de  $X$ , pois deve haver única classe de equivalência de vértices.



Por fim, demonstra-se que  $M$  admite apresentação onde cada dois pares complementares entrelaçados ocorrem sem outras arestas entre eles, ou seja,





Elas são respectivamente as apresentações

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle,$$

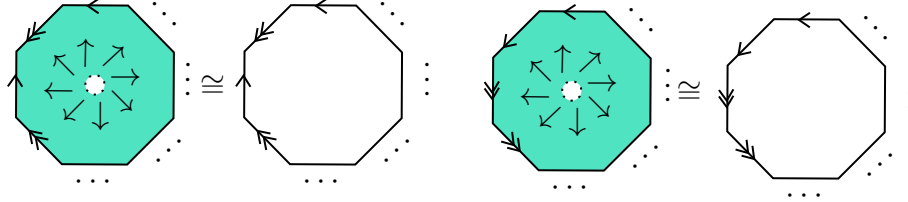
$$\langle a_1, \dots, a_h \mid a_1 a_1 \dots a_h a_h \rangle.$$

É possível então estudar como tais apresentações podem nos dar informações do grupo fundamental dessas superfícies. De fato, uma consequência natural disso é que, vendo como complexo CW,  $T^2 \# \dots \# T^2$  é obtido do buquê de  $2g$  círculos  $S^1 \vee \dots \vee S^1$  colando uma única 2-célula, considerando a colagem na fronteira da 2-célula dada por  $\chi : S^1 \rightarrow S^1 \vee \dots \vee S^1$ ,  $\chi = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Para  $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ , temos, analogamente, a colagem de uma 2-célula num buquê de  $h$  circunferências  $S^1 \vee \dots \vee S^1$ , com a colagem dada por  $\psi = a_1 a_1 \dots a_h a_h$ .

Como consequência do teorema de Seifert-van Kampen, se  $X$  é obtido de  $A$  colando uma 2-célula, e  $\chi$  é o mapa de colagem da fronteira, teremos que

$$\pi_1(X) = \pi_1(A) / \overline{\chi_* \pi_1(S^1)},$$

considerando  $p \in X$  ponto na 2-célula, vizinhança  $V$  de  $p$  e  $U = X \setminus p$  a decomposição de  $X = U \cup V$ . No caso da soma conexa de toros e planos projetivos, temos os esquemas abaixo, mostrando a equivalência homotópica entre  $U = X \setminus \{p\}$  e o buquê de circunferências:



Nesse sentido, podemos concluir que

$$\pi_1(T^2 \# \dots \# T^2) = \frac{\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1)}{\overline{\chi_* \pi_1(S^1)}} = \frac{F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)}{\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle},$$

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2) = \frac{\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1)}{\overline{\psi_* \pi_1(S^1)}} = \frac{F(a_1, \dots, a_h)}{\langle a_1^2 \dots a_h^2 \rangle}$$

onde  $\langle - \rangle$  representa o fecho normal dentro do grupo livre.

Apesar desta possibilidade de descrever o grupo fundamental em termos de quocientes de um grupo livre, apenas esta descrição não nos permite distinguir tais grupos. De fato, um mesmo grupo pode ter diversas apresentações diferentes, e não há um algoritmo específico que permita decidir se duas apresentações são equivalentes ou não. Para isto, precisaremos de uma outra informação algébrica do grupo.

## 6 A Abelianização de Grupos

Dado um grupo  $G$  com elemento neutro  $e$  e elementos  $g, h \in G$ , o *comutador* de  $g, h$  é o elemento  $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ . Note que  $g$  e  $h$  comutam se e somente se  $[g, h] = e$ . Considera-se o *subgrupo comutador* de  $G$ , denotado por  $[G, G]$ , o subgrupo gerado pelos comutadores de todos os elementos de  $G$ .

Observe que, para  $g, h, x \in G$ , vale

$$\begin{aligned} x[g, h]x^{-1} &= xghg^{-1}h^{-1}x^{-1} = (xgx^{-1})(xhx^{-1})(xg^{-1}x^{-1})(xh^{-1}x^{-1}) \\ &= (xgx^{-1})(xhx^{-1})(xgx^{-1})^{-1}(xhx^{-1})^{-1} = [xgx^{-1}, xhx^{-1}], \end{aligned}$$

de modo que a conjugação de um comutador ainda é um comutador. E como a conjugação é automorfismo do grupo  $G$ , isto mostra que  $x[G, G]x^{-1}$  para todo  $x \in G$ , e portanto  $[G, G]$  é subgrupo normal. Tomando o quociente  $G/[G, G]$ , podemos concluir que ele será um grupo abeliano; de fato, como  $[g, h] \in [G, G]$  para todos  $g, h \in G$ , considerando a projeção  $x \mapsto \bar{x} = x[G, G]$ ,

$$\overline{ghg^{-1}h^{-1}} = \bar{e} \implies \overline{gh} = \overline{hg} \implies \overline{gh} = \overline{hg}.$$

Mais fortemente, dado  $N \leq G$  subgrupo normal, teremos que  $G/N$  é abeliano se e somente se  $[G, G] \leq N$ . O quociente  $G/[G, G]$  é dito a *abelianização* de  $G$ , denotado por  $G_{ab}$ . Ela satisfaz a seguinte propriedade universal: dado  $H$  grupo abeliano e  $\varphi : G \rightarrow H$  homomorfismo, existe um único homomorfismo  $\tilde{\varphi} : G_{ab} \rightarrow H$  tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \pi \downarrow & \searrow \varphi & \\ G_{ab} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & H \end{array}$$

O que procuraremos fazer, então, é calcular as abelianizações dos grupos fundamentais das superfícies, e sendo grupos abelianos não isomorfos, poderemos distinguir topologicamente as superfícies descritas.

Inicialmente, demonstra-se o seguinte:

**Proposição 6.1.** *Se  $F(a_1, \dots, a_n)$  é o grupo livre em  $n$  geradores, então*

$$F(a_1, \dots, a_n)_{ab} \cong \overbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}^n.$$

*Ou seja, a abelianização do grupo livre em  $n$  geradores é o grupo livre abeliano em  $n$  geradores.*

*Demonstração.* Considere  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  e a função  $f : S \rightarrow \mathbb{Z}^n$  levando

$$a_i \longmapsto (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

com 1 na  $i$ -ésima posição. Então pela propriedade universal do grupo livre gerado por  $S$ , existe único homomorfismo  $\bar{f} : F(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbb{Z}^n$  que estende  $f$ . Como as imagens dos  $a_i$  geram  $\mathbb{Z}^n$ , teremos que  $\bar{f}$  é sobrejetora. Afirma-se agora que o núcleo de  $\bar{f}$  é exatamente o subgrupo comutador de  $F(a_1, \dots, a_n)$ . Com efeito, vemos que o subgrupo comutador de  $F(a_1, \dots, a_n)$  está contido no núcleo de  $\bar{f}$ , pois

$$\bar{f}([g, h]) = \bar{f}(ghg^{-1}h^{-1}) = \bar{f}(g) + \bar{f}(h) - \bar{f}(g) - \bar{f}(h) = \mathbf{0}$$

com  $\mathbb{Z}^n$  abeliano. Mostrar que  $[F(a_1, \dots, a_n), F(a_1, \dots, a_n)] \supseteq \ker f$  é um processo mais trabalhoso. Veja que uma palavra reduzida  $g \in F(a_1, \dots, a_n)$  é tal que  $\bar{f}(g) = 0$  se e somente se, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , os expoentes dos  $a_i$  que ocorrem em  $g$  devem ter soma zero. Mostremos que todo elemento de  $F(a_1, \dots, a_n)$  satisfazendo isso é gerado por comutadores.

Isto será feito por indução na quantidade dos geradores  $\{a_1, \dots, a_n\}$  que ocorrem em  $g$ . Se apenas um destes geradores ocorrem em  $g$ ,  $g$  é da forma  $a_i^n$ , com  $n = 0$ , e claramente  $g = [a_1, a_1]$ , a palavra vazia. Suponha agora que, quando em  $g$  ocorrem  $k$  ou menos dos geradores  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , ele é gerado por comutadores, e seja  $g \in F(a_1, \dots, a_n)$  onde ocorrem  $k + 1$  dos geradores. Escolhendo então  $a_j$  gerador ocorrendo em  $g$ , temos que  $g$  é da forma

$$g = g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots a_j^{m_{r-1}} g_r a_j^{m_r} g_{r+1},$$

onde  $g_i$  são elementos do grupo livre onde ocorrem apenas  $k$  ou menos dos geradores, e  $m_1 + \dots + m_r = 0$ . Como  $a_j^{m_r} g_{r+1} = [a_j^{m_r}, g_{r+1}] g_{r+1} a_j^{m_r}$ , temos

$$\begin{aligned} g &= g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots a_j^{m_{r-1}} g_r a_j^{m_r} g_{r+1} \\ &= g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots a_j^{m_{r-1}} g_r [a_j^{m_r}, g_{r+1}] g_{r+1} a_j^{m_r} \\ &= g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots a_j^{m_{r-1}} h_r a_j^{m_r}, \end{aligned}$$

onde

$$h_r = g_r [a_j^{m_r}, g_{r+1}] g_{r+1}.$$

Veja que, pela hipótese de indução em  $g_r$  e  $g_{r+1}$ ,  $h_r$  é gerador por comutadores (mesmo que nele ocorram possivelmente mais de  $k$  dos geradores). Repetindo o processo para  $r - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} g &= g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots a_j^{m_{r-1}} h_r a_j^{m_r} \\ &= g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots [a_j^{m_{r-1}}, h_r] h_r a_j^{m_{r-1}} a_j^{m_r} \\ &= g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots [a_j^{m_{r-1}}, h_r] h_r a_j^{m_{r-1} + m_r} \\ &= g_1 a_j^{m_1} g_2 a_j^{m_2} \dots h_{r-1} a_j^{m_{r-1} + m_r}, \end{aligned}$$

com  $h_{r-1} = g_{r-1}[a_j^{m_{r-1}}, h_r]h_r$ , novamente gerado por comutadores pela hipótese de indução sobre  $g_{r-1}$  e como  $h_r$  também é. Indutivamente, obteremos sequência decrescente  $h_r, h_{r-1}, \dots, h_1$  de elementos tais que

$$h_{i-1} = g_{i-1}[a_j^{m_{i-1}}, h_i]h_i,$$

com cada  $h_i$  gerado por comutadores. Então obtemos  $g$  da forma

$$\begin{aligned} g &= g_1 a_j^{m_1} h_2 a_j^{m_2 + \dots + m_r} \\ &= h_1 a_j^{m_1 + \dots + m_r} = h_1, \end{aligned}$$

pois  $m_1 + \dots + m_r = 0$ . E como  $h_1$  será gerado por comutadores, teremos  $g$  gerado por comutadores. Isto permite concluir o passo indutivo, e mostrando que  $[F(a_1, \dots, a_n), F(a_1, \dots, a_n)] = \ker \bar{f}$ , conclui-se

$$F(a_1, \dots, a_n)_{ab} = \overbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}^n = \mathbb{Z}^n.$$

□

Dado homomorfismo de grupos  $\varphi : G \rightarrow H$ , teremos que

$$\varphi[G, G] = [\varphi(G), \varphi(G)],$$

onde  $[\varphi(G), \varphi(G)]$  é o subgrupo em  $H$  gerado pelos comutadores de elementos na imagem de  $\varphi$ . Isto pois, para  $x, y \in G$ ,

$$\varphi([x, y]) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Considera-se o caso específico em que  $N \leq G$  é subgrupo normal de  $G$  e  $\pi : G \rightarrow G/N$  é a projeção sobrejetora no quociente. Então

$$\pi([G, G]) = [\pi(G), \pi(G)] = [G/N, G/N],$$

de modo que a projeção do subgrupo comutador é o subgrupo comutador do quociente. Como consequência disso,

$$(G/N)_{ab} = \frac{G/N}{[G/N, G/N]} = \frac{G/N}{\pi([G, G])} = \frac{\pi(G)}{\pi([G, G])},$$

onde sabemos  $\pi([G, G])$  ser subgrupo normal de  $\pi(G) = G/N$ . Com o homomorfismo sobrejetor  $G \rightarrow (G/N)/[G/N, G/N]$  dado por

$$g \mapsto \bar{g}[G/N, G/N],$$

temos que  $g$  pertence ao núcleo se e somente se

$$\begin{aligned}\bar{g}[G/N, G/N] = [G/N, G/N] &\iff \bar{g} \in [G/N, G/N] \\ &\iff g \in \pi^{-1}[G/N, G/N] = \pi^{-1}\pi[G, G],\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}g \in \pi^{-1}\pi[G, G] &\iff \bar{g} = \bar{k}, k \in [G, G] \iff \overline{gk^{-1}} = \bar{e}, k \in [G, G] \\ &\iff gk^{-1} = n \in N \iff g = kn, k \in [G, G], n \in N \iff g \in N \cdot [G, G].\end{aligned}$$

Desta maneira, concluímos que

$$(G/N)_{ab} \cong G/\pi^{-1}\pi[G, G] \cong G/(N \cdot [G, G]),$$

lembrando que  $N \cdot [G, G]$  é subgrupo normal de  $G$ . Em particular, se  $N \leq [G, G]$ , pelo teorema da correspondência, vale  $\pi^{-1}\pi[G, G] = [G, G]$ , ou equivalentemente  $N \cdot [G, G] = [G, G]$ . Isto implicaria neste caso que

$$(G/N)_{ab} \cong G/[G, G] = G_{ab}.$$

Ainda no caso mais geral, considere  $\varphi : G \rightarrow G_{ab} = G/[G, G]$  a projeção no quociente da abelianização, e  $\varphi(N) \leq G_{ab}$ . Como  $G_{ab}$  é abeliano,  $\varphi(N)$  é subgrupo normal de  $G_{ab}$ , e podemos definir o homomorfismo sobrejetor  $f : G \rightarrow G_{ab}/\varphi(N)$ . Agora, veja que para  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned}g \in \ker f &\iff f(g) = 0 \iff \varphi(g)\varphi(N) = \varphi(N) \\ &\iff \varphi(g) \in \varphi(N) \iff g \in \varphi^{-1}\varphi(N),\end{aligned}$$

e analogamente ao que foi deduzido anteriormente, temos

$$\ker f = \varphi^{-1}\varphi(N) = N \cdot [G, G].$$

Isto implica nos isomorfismos

$$(G/N)_{ab} \cong \frac{G}{N \cdot [G, G]} \cong \frac{G_{ab}}{\varphi(N)}.$$

## 7 O Teorema de Classificação, Parte II

A partir das informações algébricas da abelianização de um grupo, calcularemos as abelianizações dos grupos fundamentais das superfícies encontradas, buscando distinguí-las desta maneira.

Em primeiro lugar, considera-se  $\#^g T^2 = \overbrace{T^2 \# \dots \# T^2}^g$ . Sabemos que seu grupo fundamental é

$$\pi_1(\#^g T^2) = \frac{F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)}{\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle} = \frac{F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)}{\langle [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle}.$$

Sendo  $G = F(a_1, \dots, a_g)$ , temos que  $\langle [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle \subseteq [G, G]$ , pois  $[G, G]$  é subgrupo normal contendo o produto de comutadores  $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ . Isto implica, baseado no que foi demonstrado acima, que

$$\pi_1(\#^g T^2)_{ab} \cong F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

Analisa-se com mais cuidado o caso de  $\#^h \mathbb{R}P^2 = \overbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}^h$ , em que

$$\pi_1(\#^h \mathbb{R}P^2) = \frac{F(a_1, \dots, a_h)}{\langle a_1^2 \dots a_h^2 \rangle}.$$

Denotando  $G = F(a_1, \dots, a_h)$ ,  $N = \langle a_1^2 \dots a_h^2 \rangle$ , e  $\varphi : G \rightarrow G_{ab}$  a abelianização, temos

$$\pi_1(\#^h \mathbb{R}P^2)_{ab} \cong \frac{G}{N \cdot [G, G]} \cong \frac{G_{ab}}{\varphi(N)}.$$

Afirma-se que  $N$  é o subgrupo  $H$  de  $G$  gerado pelos elementos da forma

$$g(a_1^2 \dots a_h^2)g^{-1},$$

onde  $g \in G$ . De fato, cada um destes elementos deve estar em  $N$ , e portanto  $H \subseteq N$ . Temos que  $H$  é normal, pois se  $g \in H$  e  $x \in G$ ,

$$\begin{aligned} xgx^{-1} &= xg_1(a_1^2 \dots a_h^2)g_1^{-1} \dots g_r(a_1^2 \dots a_h^2)g_r^{-1}x^{-1} \\ &= (xg_1(a_1^2 \dots a_h^2)g_1^{-1}x^{-1})xg_2 \dots (xg_r(a_1^2 \dots a_h^2)g_r^{-1}x^{-1}) \\ &= (xg_r)(a_1^2 \dots a_h^2)(xg_r)^{-1} \dots (xg_r)(a_1^2 \dots a_h^2)(xg_r)^{-1} \in H. \end{aligned}$$

Com  $H$  normal e  $a_1^2 \dots a_h^2 \in H$ , deve-se ter  $N \subseteq H$ , e então  $H = N$ . Mas veja que, identificando  $G_{ab}$  com  $\mathbb{Z}^h$ ,

$$\varphi(g(a_1^2 \dots a_h^2)g^{-1}) = \varphi(g) + \varphi(a_1^2 \dots a_h^2) - \varphi(g) = \varphi(a_1^2 \dots a_h^2),$$

e portanto  $\varphi(N) \subseteq \mathbb{Z}^h$  será o subgrupo cíclico gerado pelo elemento

$$(2, \dots, 2) \in \mathbb{Z}^h.$$

Por conseguinte, encontrar  $\pi_1(\#^h \mathbb{R}P^2)_{ab}$  é descrever o quociente de  $\mathbb{Z}^h$  pelo subgrupo cíclico  $C$  gerado por  $(2, \dots, 2)$ . Demonstra-se que

$$\mathbb{Z}^h/C \cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

por meio da seguinte função  $\psi : \mathbb{Z}^h \rightarrow \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dada por

$$\psi(x_1, \dots, x_{h-1}, x_h) = (x_1 - x_h, \dots, x_{h-1} - x_h, \overline{x_h})$$

onde  $\overline{x_h} = x_h \pmod{2}$ . É simples ver que  $\psi$  será homomorfismo sobrejetor, e vê-se que

$$\begin{aligned} \psi(x_1, \dots, x_h) = 0 &\iff x_1 = x_2 = \dots = x_{h-1} = x_h, \quad x_h \in 2\mathbb{Z} \\ &\iff (x_1, \dots, x_h) = s(2, 2, \dots, 2, 2), \quad s \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e portanto  $\ker \psi = C = \varphi(N)$ , o grupo cíclico gerado por  $\varphi(a_1, \dots, a_h)$ . Pelo teorema do isomorfismo, então  $\mathbb{Z}^h/C \cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , e isto finaliza o raciocínio que

$$\pi_1(\#^h \mathbb{R}P^2)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Enfim, devido à unicidade da classificação dos grupos abelianos finitamente gerados, e pela descrição completa

$$\begin{aligned} \pi_1(S^2)_{ab} &= \{0\}, \\ \pi_1(\#^g T^2)_{ab} &= \mathbb{Z}^{2g}, \\ \pi_1(\#^h \mathbb{R}P^2)_{ab} &= \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

podemos efetivamente concluir que as superfícies compactas listadas são duas a duas não homeomorfas entre si, senão possuiriam abelianizações de seus grupos fundamentais isomorfas. Conclui-se então a segunda parte do teorema da classificação de superfícies.

## Referências

- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*. 3ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 2002. DOI: [10.1007/978-1-4613-0041-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0).
- [Lee11] John Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2011. DOI: [10.1007/978-1-4419-7940-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7940-7).