Formas Diferenciais e a Cohomologia de de Rham

Eduardo Sodré

IME-USP

Novembro de 2021

Motivação

"O Conceito de integração em formas é de fundamental importância em topologia diferencial, geometria, e física, e culmina num dos exemplos mais importantes de cohomologia, a saber a cohomologia de de Rham, que (mais ou menos) mede precisamente o quanto o teorema fundamental do cálculo falha em dimensões maiores e em variedades gerais."

-Terrence Tao, tradução livre

Motivação: Campos Conservativos

Seja $V : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vetorial suave, calculamos integrais de linha sobre curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$:

$$\int_\gamma V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Se V vem de um potencial φ, $V = \nabla\varphi$, sabemos que

$$\int_\gamma \nabla\varphi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

pelo teorema fundamental do cálculo (para integrais de linha).

A integral de linha independe do caminho entre dois pontos: campo conservativo.

Motivação: Campos Conservativos

Vale uma recíproca: Se $V : U \to \mathbb{R}^n$ é campo conservativo, fixa $\mathbf{p_0} \in U$, e define potencial

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{p_0}}^{\mathbf{x}} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

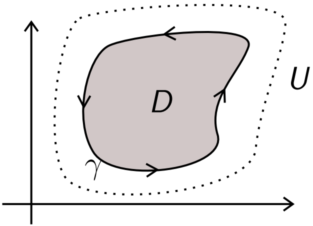
Vale que $\nabla\varphi = V$! "Integra-se" o campo e acha potencial.

Motivação: Campos Conservativos

Teorema (Green)

Seja γ curva suave, simples, fechada e positivamente orientada, D região limitada pela curva, e U vizinhança de D. Funções $P, Q : U \to \mathbb{R}$ suaves, então vale

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



Motivação: Campos Conservativos

Pensa em $Pdx + Qdy$ como integração no campo $(P, Q) \cdot (dx, dy)$. Então, se vale a condição *diferencial*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

o campo é conservativo! Podemos integrá-lo.

Mas há "obstruções topológicas" para o teorema de Green valer "sempre". Considera o campo

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Motivação: Campos Conservativos

Vale

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

mas, com caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$,

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = 2\pi \neq 0$$

Isto pois o campo não é definido em $(0, 0)$. A presença do "buraco" impede a integrabilidade do campo.

Curiosidade: relacionado com função $\frac{1}{z}$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mostra que $log(z)$ não pode ser definido globalmente como potencial de $1/z$.

Motivação: Campos Conservativos

Objetos como $f(t)dt$, $Pdx + Qdy$ e $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ podem ser formalizados como **formas**, objetos que *"integramos"* e *derivamos*.

A *topologia* do espaço fortemente afeta a integrabilidade de formas. Em certos espaços, elas satisfazerem uma condição *diferencial* boa implica em integrabilidade; em outros, não.

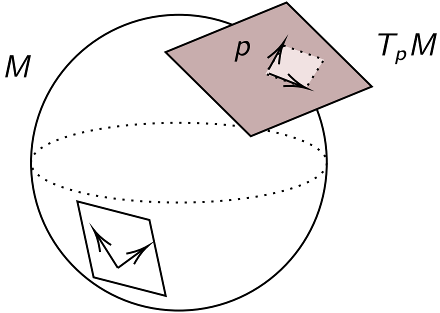
Tal informação da variedade suave (espaço) está contida em sua **cohomologia de de Rham**.

Informação da cohomologia $\leftrightarrow$ informação da topologia.

Formas Diferenciais

Seja M variedade suave. Formas diferenciais: intuitivamente, maneiras de calcular k-volumes em M.

Com $p \in M$, espaço tangente T_pM é espaço vetorial. Ideia de calcular k-áreas em T_pM.



Formas em Espaços Vetoriais

Dado espaço vetorial V, uma k-**forma** em V é função

$$\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$-multilinear e alternada:

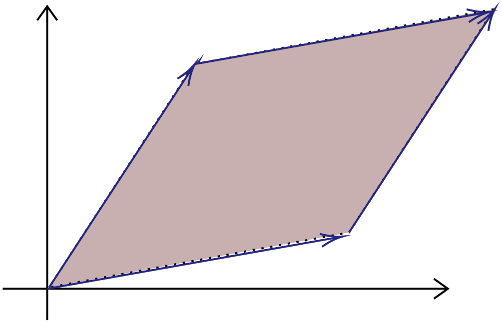
$$\omega(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) = 0.$$

Então se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é LD $\implies \omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Conjunto das k-formas em V: $\Lambda^k V^*$.

Formas em Espaços Vetoriais

Ideia intuitiva de "k-volume" gerado por $v_1, \ldots, v_k$: exemplo do determinante.



Formas Diferenciais

k-**forma diferencial** em M: Para todo $p \in M$, toma forma $\omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$. Queremos que varie suavemente com p.

Equivalente a uma aplicação

$$\omega : \begin{array}{ccc} \overbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}^{k \text{ vezes}} & \to & C^\infty(M) \\ (X_1, X_2, \ldots, X_k) & \mapsto & \omega(X_1, \ldots, X_k) \end{array}$$

que é $C^\infty(M)$-multilinear e alternada. Avaliando em p,

$$\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega_p(X_1|_p, \ldots, X_k|_p).$$

de modo que $\omega_p \in \Lambda^k (T_p M)^* = \Lambda^k T_p^* M$.

k-formas em M: $\Omega^k(M)$. 0-formas são $\Omega^0(M) \cong C^\infty(M)$.

Exemplos de Formas Diferenciais

Considere $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$Pdx + Qdy$$

Como age em campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$? Campos em $\mathbb{R}^2$ se escrevem como

$$V = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \cong (a(x,y), b(x,y)).$$

Avaliando em $p \in \mathbb{R}^2$,

$$V_p = a(x_p, y_p)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b(x_p, y_p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \cong (a(x_p, y_p), b(x_p, y_p))$$

pois x, y são coordenadas globais em $\mathbb{R}^2$.

Exemplos de Formas Diferenciais

Calula $\omega(V) = (Pdx + Qdy)(V)$ por multilinearidade e sabendo que

$$dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 1,$$

$$dx\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0.$$

Então

$$\omega(V) = aP + bQ.$$

Mas como são k-formas, para $k \geq 2$? Ainda dá pra construir a partir dos dx^i, usando **produto wedge**.

Exemplos de Formas Diferenciais

Define $dx \wedge dy$ por

$$(dx \wedge dy)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 1,$$

mantendo alternatividade e multilinearidade. Generaliza para

$$(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) = \delta^I_J$$

Essencialmente generalizações do determinante.

Multiplicação interior: Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$,

$$(\iota_X \omega)(X_1, \ldots, X_k) = \omega(X, X_1, \ldots, X_k).$$

Integração de 1-formas

Com caminho suave $\gamma : [a, b] \to M$, pode-se integrar uma 1-forma em M sobre γ:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt,$$

onde $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Pode-se expressar pela noção de pullback de formas.

O que seriam 1-formas "dadas por um potencial"? Como se integrariam?

O Diferencial de Funções

Dada $f \in C^\infty(M)$, podemos tomar a 1-forma df:

$$df(X) = X(f), \quad \text{pontualmente: } df_p(v) = v(f),\ v \in T_pM.$$

Em coordenadas locais $x^1, \ldots, x^n$, escreve-se

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

É o **diferencial** de f. Já sabemos integrar:

$$\int_\gamma df = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(B) - f(A)$$

Então, quando sabemos se existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $df = \omega$?

A Derivada Exterior

Pode estender a noção de diferencial para formas.

Teorema

Existe um único operador $\mathbb{R}$-linear $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ tal que

1. $d(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+1}(M)$;
2. $d \circ d = 0$;
3. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, *se* $\omega \in \Omega^k(M)$;
4. *Para* $f \in C^\infty(M)$, df *é o diferencial de* f.

Em coordenadas locais,

$$d\left(\sum_I{}' \omega_I dx^I\right) = \sum_I{}' d\omega^I \wedge dx^I = \sum_I{}' \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I.$$

A Derivada Exterior

Note que

$$Pdx + Qdy \overset{d}{\longmapsto} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

então, nas condições do teorema de Green, se $d\omega = 0$, o campo é conservativo, e $\omega = d\varphi$, podemos "integrar"!

Forma ω é **fechada** se $d\omega = 0$.

Forma ω é **exata** se $\omega = d\eta$.

Fácil ver que exata $\implies$ fechada.

Quando que forma fechada é exata?

A Cohomologia de de Rham

Temos a sequência de espaços vetoriais

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1} \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

k-formas fechadas: $Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))$

k-formas exatas: $B^k(M) = \mathrm{Im}\,(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))$

“Grupos” de cohomologia de de Rham:

$$H^k_{dR}(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

$$[\omega] = [\eta] \iff \exists\alpha \text{ tal que } \omega - \eta = d\alpha.$$

Pullback de Formas

Com $F : M \to N$ mapa suave entre variedades, dada $\omega \in \Omega^k(N)$, podemos definir o **pullback** $F^*\omega \in \Omega^k(M)$:

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k))$$

$F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ é $\mathbb{R}$-linear, e satisfaz

- $F^*(f\omega) = (f \circ F)F^*\omega$;
- $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$;
- $(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega)$;
- $(\mathrm{Id}_M)^*\omega = \omega$.

Então Ω^k : **Man** $\to$ **Vec** é funtor contravariante!

A Cohomologia de de Rham como Funtor

Possível mostrar que pullback comuta com derivada exterior:

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$$

Conclui que pullback preserva formas fechadas e exatas.

Proposição

Para qualquer mapa suave $F : M \to N$ entre variedades suaves, o pullback $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ preserva formas fechadas e exatas. Portanto, existe um mapa de cohomologia induzido $F^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$, tal que $H^k_{dR} : \mathbf{Man} \to \mathbf{Vec}$ é funtor contravariante.

$F^*[\omega] = [F^*\omega]$ é bem definido, e mostra que a cohomologia é invariante por *difeomorfismos*.

Exemplos de Grupos de Cohomologia

M variedade suave $\implies H^0_{dR}(M) = \mathbb{R}^\rho$, ρ a quantidade de componentes conexas de M.

Em $\mathbb{R}$: $\omega = f(x)dx$, então $\omega = dg$,

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Em S^1: forma ângulo $d\theta$ (apenas notação: **não** é exata!). Mostra que $H^1_{dR}(S^1) \neq 0$. De fato, mostra-se que

$$\int_{S^1} : \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}$$

induz isomorfismo $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$.

Invariância por Homotopia

Sejam $F, G : M \to N$ mapas suaves. Quando que $F^* = G^*$?

Para $\omega \in Z^k(N)$, precisa decidir existência de η tal que $G^*\omega - F^*\omega = d\eta$.

Constrói algo mais geral e sistemático: família de mapas $h : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ tal que

$$d(h\omega) + h(d\omega) = G^*\omega - F^*\omega$$

h é dito **operador de homotopia** entre F^* e G^*.

Proposição

Se $F, G : M \to N$ são tais que existe operador de homotopia h entre F^* e G^*, então os mapas induzidos de cohomologia $F^*, G^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ são iguais.

Invariância por Homotopia

Mas quando existe operador de homotopia?

Quando os mapas são homotópicos!

Lema

Considere $i_t : M \to M \times I$, $i_t(x) = (x, t)$. *Então existe operador de homotopia entre* $i_0^*, i_1^* : \Omega(M \times I) \to \Omega(M)$.

AVISO: Utilização extensa de técnicas de topologia diferencial!

Seja s a coordenada em $\mathbb{R}$, e $S \in \mathfrak{X}(M \times I)$ o campo $S_{(q,s)} = (0, \partial_s|_s)$. Identifica-se

$$T_{(q,s)}(M \times I) \cong T_q M \oplus T_s \mathbb{R}.$$

Invariância por Homotopia

Dado $\omega \in \Omega^k(M \times I)$, define-se

$$h\omega := \int_0^1 i_t^*(\iota_S \omega) dt,$$

ou seja,

$$(h\omega)_q = \int_0^1 (i_t^*(\iota_S \omega))_q dt$$

integrando é função de t em $\Lambda^{k-1}(T_q^* M)$.

Ideia de "integração nas fibras" da projeção $\pi : M \times I \to M$, S campo vertical. Será suave em coordenadas locais, e define $(k-1)$-forma.

Invariância por Homotopia

Possível diferenciar sob sinal de integração:

$$d(h\omega) = \int_0^1 d(i_t^*(\iota_S \omega))dt.$$

Calcula pela fórmula mágica de Cartan $\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$:

$$\begin{aligned} h(d\omega) + d(h\omega) &= \int_0^1 \left(i_t^*(\iota_S d\omega) + d(i_t^*(\iota_S \omega))\right) dt \\ &= \int_0^1 i_t^*(\iota_S d\omega + d\iota_S \omega)dt \\ &= \int_0^1 \iota_t^*(\mathcal{L}_S \omega)dt \end{aligned}$$

Invariância por Homotopia

Simplificamos a derivada de Lie: o fluxo de S é $\theta_t(q, s) = (q, s + t)$, completo, e $i_t = \theta_t \circ i_0$. Sabemos que

$$\mathcal{L}_S \omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_t^* \omega \implies \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \theta_t^* \omega = \theta_{t_0}^* (\mathcal{L}_S \omega)$$

Então

$$\iota_t^*(\mathcal{L}_S \omega) = \iota_0^*(\theta_t^*(\mathcal{L}_S \omega)) = i_0^* \left(\frac{d}{dt} (\theta_t^* \omega) \right) =$$
$$\frac{d}{dt} \iota_0^*(\theta_t^* \omega) = \frac{d}{dt} \iota_t^* \omega$$

e portanto

$$h(d\omega) + d(h\omega) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \iota_t^* \omega dt = \iota_1^* \omega - \iota_0^* \omega. \quad \square$$

Invariância por Homotopia

Proposição

Sejam M, N variedades suaves e $F, G : M \to N$ mapas suaves homotópicos. Para todo k, os mapas de cohomologia induzidos

$$F^*, G^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$$

são iguais.

Com homotopia $H : M \times I \to N$, temos

$$F^* = (H \circ i_0)^* = i_0^* \circ H^* = i_1^* \circ H^* = (H \circ i_1)^* = G^*. \quad \square$$

Invariância por Homotopia

Teorema (Invariância Homotópica da Cohomologia)

Sejam M, N variedades suaves homotopicamente equivalentes. Então para todo k, $H^k_{dR}(M) \cong H^k_{dR}(N)$, e os isomorfismos são induzidos por qualquer equivalência homotópica $F : M \to N$.

$F : M \to N$ $G \to N$ equivalências homotópicas: pode assumir F, G suaves, pois existem $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ suaves homotópicas a F e G.

Então $G \circ F \cong \mathrm{Id}_M$, $F \circ G \cong \mathrm{Id}_N$,

$$F^* \circ G^* = (G \circ F)^* = (\mathrm{Id}_M)^* = \mathrm{Id}_{H^k_{dR}(M)}$$

e analogamente $G^* \circ F^* = \mathrm{Id}_{H^k_{dR}(N)}$. $\square$

Corolário

A cohomologia de de Rham é invariante por homeomorfismos.

Aplicações da Invariância Homotópica

Teorema

Se M é contrátil, então para $k \geq 1$, $H^k_{dR}(M) = 0$.

Lema (Poincaré)

Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto estrelado, então $H^k_{dR}(U) = 0$, $\forall k \geq 1$.

Corolário

Toda forma fechada é localmente exata.

Mais Resultados: First Cohomology

Seja M variedade suave conexa e $q \in M$. Define-se mapa $\Phi : H^1_{dR}(M) \times \pi_1(M, q) \to \mathbb{R}$:

$$\Phi[\omega][\gamma] = \int_{\widetilde{\gamma}} \omega$$

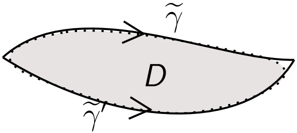
$\widetilde{\gamma}$ loop suave por partes na mesma classe de homotopia de γ.

É bem definido para ω, poi se $[\omega_1] = [\omega']$, $\omega - \omega' = df$, e

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \omega - \int_{\widetilde{\gamma}} \omega' = \int_{\widetilde{\gamma}} df = f(q) - f(q) = 0.$$

Mais Resultados: First Cohomology

É também bem definindo para $\widetilde{\gamma}$, como consequência do teorema de Stokes e ω ser fechada. Com $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}' \in \pi_1(M, q)$ homotópicos,



$$\int_{\widetilde{\gamma}'} \omega - \int_{\widetilde{\gamma}} \omega = \int_D d\omega = 0$$

Teorema

O mapa linear $H^1_{dR}(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M, q), \mathbb{R})$ *dado por* $[\omega] \mapsto \Phi[\omega][\cdot]$ *é isomorfismo.*

Mais Resultados: First Cohomology

Intuitivamente:

- $H^0_{dR}(M)$ espaço das funções $f : M \to \mathbb{R}$ localmente constantes;
- $H^1_{dR}(M)$ espaço das integrais de linha $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$ "localmente constantes" (variando γ homotopicamente fixando extremos), *módulo* as trivialmente constantes (conservativas, ou seja, quando ω é exata).

Corolário

Se M tem grupo fundamental finito, então $H^1_{dR}(M) = 0$.

Calculando mais Grupos de Cohomologia

Raciocínio análogo ao teorema de Seifert-van Kampen:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

Podemos ver o mapa induzido no pullback:

Calculando mais Grupos de Cohomologia

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^p(M) \arrow[dr, "i^*"] & \\
\Omega^p(M) \arrow[ur, "p^*"] \arrow[dr, "l^*"'] & & \Omega^p(U \cap V) \\
 & \Omega^p(V) \arrow[ur, "j^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Pullbacks são restrições, $k^*\omega = \omega|_U$.

Calculando mais Grupos de Cohomologia

Teorema (**Mayer-Vietoris**)

Seja M variedade sauve, $U, V \subseteq M$ abertos com $U \cup V = M$. Para todo k, existe mapa linear $\delta : H^k_{dR}(U \cap V) \to H^{k+1}_{dR}(M)$ tal que a seguinte sequência é exata:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^k_{dR}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V)$$
$$\xrightarrow{i^* - j^*} H^k_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_{dR}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \cdots$$

Permite calcular cohomologia das esferas S^n!

Calculando mais Grupos de Cohomologia

Sabemos que $H^0_{dR}(S^n) = \mathbb{R}$, e $H^1_{dR}(S^n) = \mathbb{R}$.

Tomando $U = S^n \setminus \{N\}$ e $V = S^n \setminus \{S\}$, temos

$$U \cong V \cong \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \underset{h.e}{\cong} S^{n-1}$$

Dada sequência exata

$$H^{p-1}_{dR}(U) \oplus H^{p-1}_{dR}(V) \to H^{p-1}_{dR}(U \cap V)$$
$$\to H^p_{dR}(S^n) \to H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V)$$

conclui que, para $p > 1$,

$$H^{p-1}_{dR}(S^{n-1}) \cong H^p_{dR}(S^n).$$

A Cohomologia das Esferas

Teorema

Para $n \geq 1$, a cohomologia de de Rham da esfera S^n é dada por

$$H^p_{dR}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{se } p = 0 \textit{ ou } p = n, \\ 0, & \textit{se } 0 < p < n. \end{cases}$$

Mais resultados: Top Cohomology

Lema

Seja ω é n-forma em $\mathbb{R}^n$ de suporte no cubo aberto unitário C^n e $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$, então existe $(n-1)$-forma η de suporte em C^n tal que $d\eta = \omega$.

Possível deduzir o n-ésimo grupo de cohomologia:

Teorema

Se M é variedade suave conexa compacta orientável n-dimensional, então $H^n_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$. Tal isomorfismo é dado pela integração em M:

$$\int_M : H^n_{dR}(M) \to \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

Mais Resultados: Top Cohomology

Teorema (Caso orientável não-compacto)

Se M é variedade suave conexa orientável não-compacta, então $H^n_{dR}(M) = 0$.

Teorema (Caso não-orientável)

Se M é variedade suave conexa não-orientável, então $H^n_{dR}(M) = 0$.

Outros Resultados

Proposição

Se M é variedade suave conexa compacta, então seus grupos de cohomologia têm dimensão finita.

Pode definir a **característica de Euler**:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{dR}(M)$$

É invariante topológico, pode mostrar que $\chi(M) = 0$ quando n é ímpar e M é orientável.

Referências

[1] Raoul Bott e Loring Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. 1ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2020.

[2] Claudio Gorodski. *Smooth Manifolds*. 1ª ed. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser, 2020.

[3] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.